1

(1) $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ について,

$$f'(x)=3x^2-6x-4=0 \text{ の解 } x \text{ は } x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$$

増減表を描くと次の通り.

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

増減表より $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$ で $f(x)$ が極値をとる. ……(答)

(2) $f(x)=0 \iff x^3-3x^2-4x+k=0$ ……①

$\iff x^3-3x^2-4x=-k$

①の異なる3つの整数解を $x=\alpha,\beta,\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とする.

解と係数の関係により, $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4\\ \alpha\beta\gamma=-k\end{cases}$ ……②

さらに, 2関数 $\begin{cases}g(x)=x^3-3x^2-4x\\ y=-k\end{cases}$ に分離することにより,

①の解とその共有点の x 座標より調べることができる.

$$g(x)=x^3-3x^2-4x$$
$$=(3x^2-6x-4)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{14}{3}x-\frac{4}{3}$$

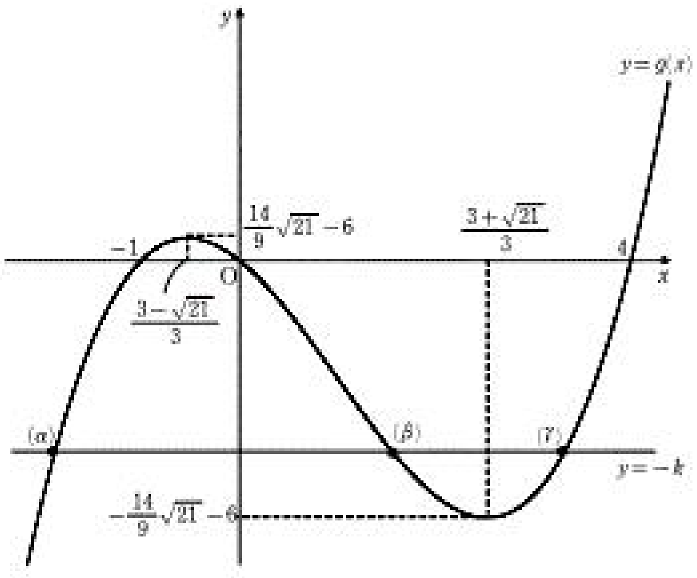
より,

$$g\left(\frac{3-\sqrt{21}}{3}\right)=-\frac{14}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{21}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{14}{9}\sqrt{21}-6 \fallingdotseq .1$$

$$g\left(\frac{3+\sqrt{21}}{3}\right)=-\frac{14}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{21}}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{14}{9}\sqrt{21}-6 \fallingdotseq \text{-}13.1$$

$\frac{3+\sqrt{21}}{3}\fallingdotseq 2.5$ より, $-k=0,\ \underbrace{-6}_{=g(1)},\ \underbrace{-12}_{=g(2)}$

つまり, $k=0,6,12$ (絞り込み)



(i) $k=0$ のとき $\alpha=-1,\beta=0,\gamma=4$

(ii) $k=6$ のとき $(\beta=1)$ ②より,

$$\begin{cases}\alpha+1+\gamma=3\\ \alpha+\gamma+\gamma\alpha=-4\\ \alpha\gamma=-6\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\gamma=2\\ \alpha\gamma=-6\end{cases}$$

↑

これをみたす整数解の組はなし.

(iii) $k=12$ のとき $(\beta=2)$ ②より,

$$\begin{cases}\alpha+2+\gamma=3\\ 2\alpha+2\gamma+\gamma\alpha=-4\\ 2\alpha\gamma=-12\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\gamma=1\\ \alpha\gamma=-6\end{cases}\qquad\therefore\ \alpha=-2,\gamma=3$$

以上 (i) ～ (iii) より, $\begin{cases}k=0 \text{ のとき } (3 \text{ つの整数解 } x=-1,0,4)\\ k=12 \text{ のとき } (3 \text{ つの整数解 } x=-2,2,3)\end{cases}$ ……(答)

2

(1) $y=x^2$ より $y'=2x$

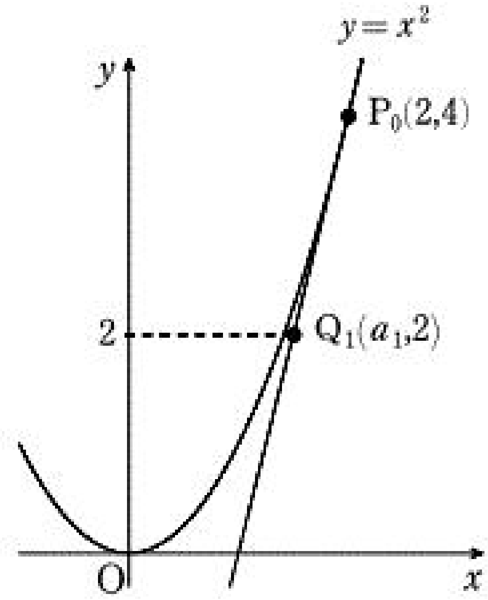
$P_0(2,\ 4)$ での接線は

$$y=4(x-2)+4$$
$$\iff y=4x-4$$

ここで, $y=2$ と連立して,

$$4x-4=2 \iff x=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \underline{a_1=\frac{3}{2}}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$



(2) $P_n(a_n,\ a_n{}^2)$ での接線は

$$y=2a_n(x-a_n)+a_n{}^2$$
$$\iff y=2a_nx-a_n{}^2$$

ここで, $y=a_n$ と連立して,

$$2a_nx-a_n{}^2=a_n \iff x=\frac{a_n{}^2+a_n}{2a_n}$$

($a_n>0$ と考えてよい)

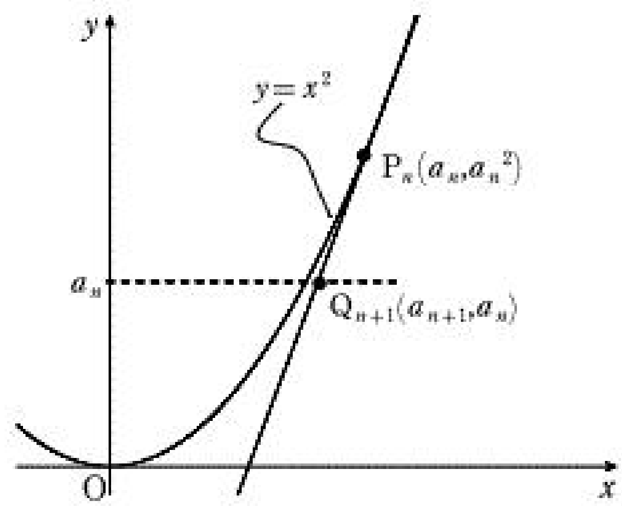
$$\therefore\ \underline{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\ (n\geqq 0)}\quad \cdots\cdots①$$

$$① \iff a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$$

数列 $\{a_n-1\}$ は, 初項 $a_0-1=1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

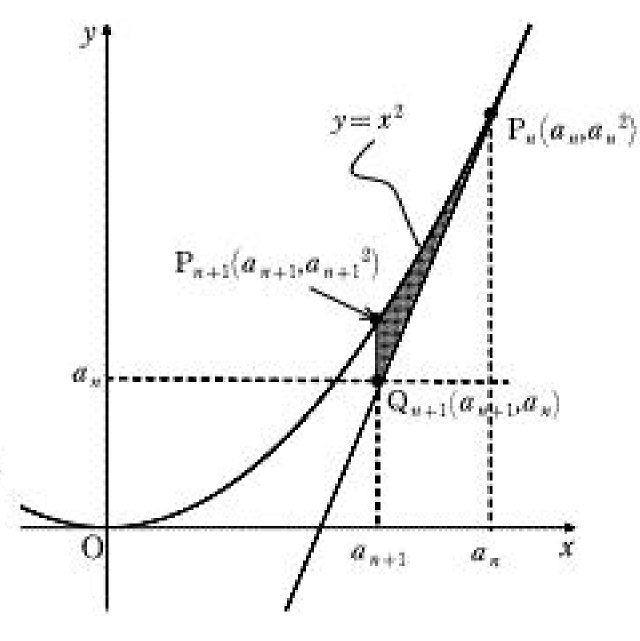
$$\therefore\ a_n-1=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\iff \underline{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\ \ (n\geqq 0)}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$



(3) 求める面積を S_n とおく,

$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}x^2dx-\frac{1}{2}(a_n+a_n{}^2)(a_n-a_{n+1})$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{a_{n+1}}^{a_n}-\frac{1}{2}(a_n{}^2-a_na_{n+1}+a_n{}^3-a_n{}^2a_{n+1})$$
$$=\frac{1}{3}a_n{}^3-\frac{1}{3}a_{n+1}{}^3-\frac{1}{2}a_n{}^2+\frac{1}{2}a_na_{n+1}$$
$$-\frac{1}{2}a_n{}^3+\frac{1}{2}a_n{}^2a_{n+1}$$
$$=-\frac{1}{6}a_n{}^3-\frac{1}{3}a_{n+1}{}^3-\frac{1}{2}a_n{}^2+\frac{1}{2}a_na_{n+1}+\frac{1}{2}a_n{}^2a_{n+1}$$
$$=\underline{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$



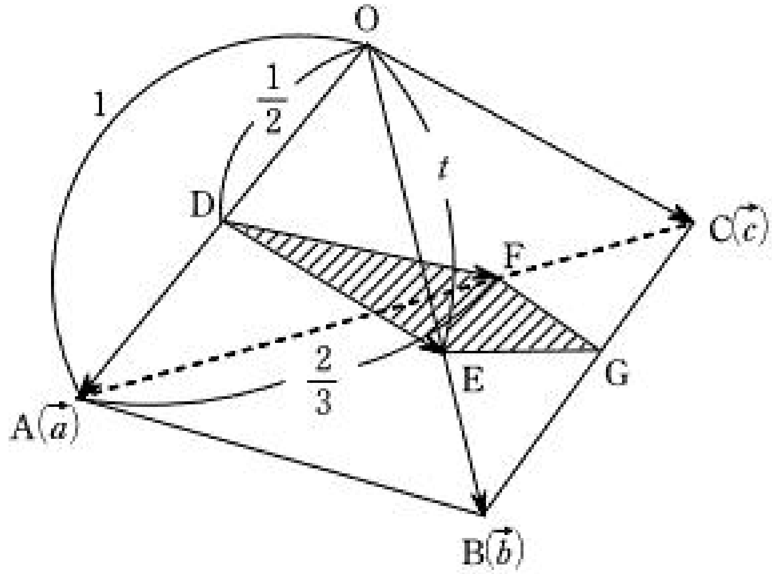
3

(1) $\overrightarrow{DE}=t\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$=\underline{t\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}}$ ……(答)

$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$=\underline{\dfrac{2}{3}\vec{c}-\dfrac{1}{6}\vec{a}}$ ……(答)



(2) $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$ に注意して

$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{DF}\Longleftrightarrow\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(t\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\vec{c}-\dfrac{1}{6}\vec{a}\right)=0$

$\Longleftrightarrow\dfrac{2}{3}t\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{t}{6}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}\cdot 1=0$

$\therefore\ \underline{t=\dfrac{1}{3}}$ ……(答)

(3) $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}$ （xとyは実数）と表せる．

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+x\left(t\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)+y\left(\dfrac{2}{3}\vec{c}-\dfrac{1}{6}\vec{a}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{6}\right)\vec{a}+xt\vec{b}+\dfrac{2y}{3}\vec{c}$

ここで, 点 G は直線 BC 上より,

$\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{6}=0\\ xt+\dfrac{2y}{3}=1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}3x+y=3\\ 3tx+2y=3\end{cases}\qquad\therefore\ \underline{\begin{cases}x=\dfrac{1}{2-t}\\ y=\dfrac{3-3t}{2-t}\end{cases}}$

これより, $\overrightarrow{OG}=\dfrac{t}{2-t}\vec{b}+\dfrac{2-2t}{2-t}\vec{c}=\dfrac{t\overrightarrow{OB}+(2-2t)\overrightarrow{OC}}{(2-2t)+t}$

G は辺 BC を $2-2t:t$ の内分点

$\therefore\ \mathrm{BG}=1\cdot\dfrac{2-2t}{2-2t+t}=\underline{\dfrac{2-2t}{2-t}}$ ……(答)