

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + k$ について,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4 = 0 \text{ の解 } x \text{ は } x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$$

増減表を描くと次の通り.

x	...	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	...	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	(極小)	$\nearrow$

増減表より $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$ で $f(x)$ が極値をとる.(答)

$$(2) \quad f(x) = 0 \iff x^3 - 3x^2 - 4x + k = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\iff x^3 - 3x^2 - 4x = -k$$

①の異なる3つの整数解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) とする.

$$\text{解と係数の関係により, } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4 \\ \alpha\beta\gamma = -k \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

さらに, 2関数 $\begin{cases} g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x \\ y = -k \end{cases}$ に分離し, 中間値の定理より,

①の解とその共有点の x 座標より調べるができる.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - 3x^2 - 4x \\ &= (3x^2 - 6x - 4) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right) - \frac{14}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

より,

$$g\left(\frac{3-\sqrt{21}}{3}\right) = -\frac{14}{3} \cdot \frac{3-\sqrt{21}}{3} - \frac{4}{3} = \frac{14}{9}\sqrt{21} - 6 \doteq 1.1$$

$$g\left(\frac{3+\sqrt{21}}{3}\right) = -\frac{14}{3} \cdot \frac{3+\sqrt{21}}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{14}{9}\sqrt{21} - 6 \doteq -13.1$$

$$\frac{3+\sqrt{21}}{3} \doteq 2.5 \text{ より, } -k = 0, \underline{\underline{-6}}, \underline{\underline{-12}}$$

つまり, $\underline{\underline{k=0, 6, 12}}$ (絞り込み)

(i) $k=0$ のとき $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 4$

(ii) $k=6$ のとき ($\beta=2$) ②より,

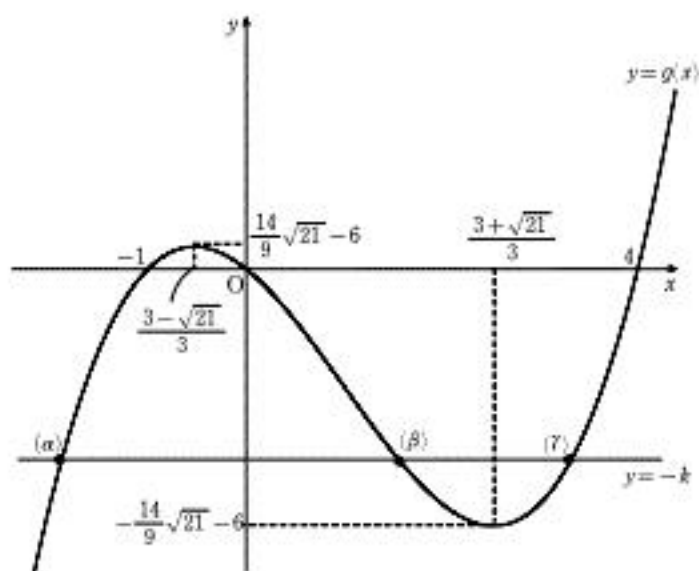
$$\begin{cases} \alpha + 1 + \gamma = 3 \\ \alpha + \gamma + \gamma\alpha = -4 \\ \alpha\gamma = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha\gamma = -6 \end{cases}$$

これをみたす整数解の組はなし.

(iii) $k=12$ のとき ($\beta=1$) ②より,

$$\begin{cases} \alpha + 2 + \gamma = 3 \\ 2\alpha + 2\gamma + \gamma\alpha = -4 \\ 2\alpha\gamma = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha\gamma = -6 \end{cases} \quad \therefore \alpha = -2, \gamma = 3$$

以上 (i) ~ (iii) より, $\underline{\underline{\begin{cases} k=0 \text{ のとき} & (3 \text{ つの整数解 } x = -1, 0, 4) \\ k=12 \text{ のとき} & (3 \text{ つの整数解 } x = -2, 2, 3) \end{cases}}}$ (答)



(1)

(i) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} |\cos x| &= \sin x \\ \Leftrightarrow \cos x &= \sin x \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

ここで、 $x = \frac{\pi}{2}$ は解ではないので $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ としよ。

$$\text{①より, } \tan x = 1 \quad \therefore \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} |\cos x| &= \sin x \\ \Leftrightarrow -\cos x &= \sin x \\ \Leftrightarrow \tan x &= -1 \quad \therefore \underline{\underline{x = \frac{3}{4}\pi}} \end{aligned}$$

以上(i), (ii) より、 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $|\cos x| = \sin x$ を

満たす実数解 x は $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi}} \quad \dots\dots(\text{答})$

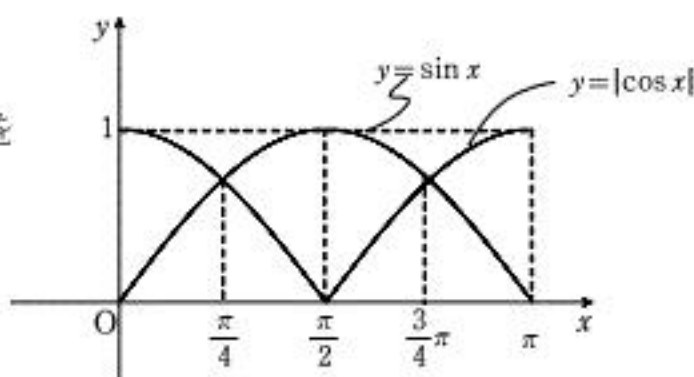
次に $\cos X = \cos(-X)$ より、

$\cos(\cos x)$ と $\cos(\sin x)$ の大小を比較することは、

$\cos|\cos x|$ と $\cos(\sin x)$ の大小を比較することと同じである。

ここで $\begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \sin x \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ であり、 $Y = \cos X$ は $0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}$ で単調減少より、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \end{array} \right\} & \quad \dots\dots \cos(\cos x) < \cos(\sin x) \\ \left\{ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right\} & \quad \dots\dots \cos(\cos x) = \cos(\sin x) \\ \left\{ \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \right\} & \quad \dots\dots \cos(\cos x) > \cos(\sin x) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(2) $\alpha = t \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、実数 β は、 $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} - t \left(\leq \frac{\pi}{2} \right)$

ここで、 $\cos \alpha - \sin \beta = \cos t - \sin \beta > \cos t - \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \cos t - \cos t = 0$

$\therefore \cos \alpha > \sin \beta$ は示された。(証明終) $\dots\dots ②$

次に、 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $f(x) = \cos(\cos x) - \sin(\sin x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) - \sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) \\ &= \cos(-\sin x) - \sin(\cos x) \\ &= \cos(\sin x) - \sin(\cos x) \\ &= f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

つまり、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ は $x = \frac{\pi}{2}$ にて対称なので、

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のみ調べればよい。

$$\text{②において, } \begin{cases} \alpha = \cos x \\ \beta = \sin x \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1 \\ 0 \leq \sin x \leq 1 \quad 1 \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2} \left(< \frac{\pi}{2} \right) \\ \text{より, } \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \text{ を満たす} \end{cases}$$

とおく。

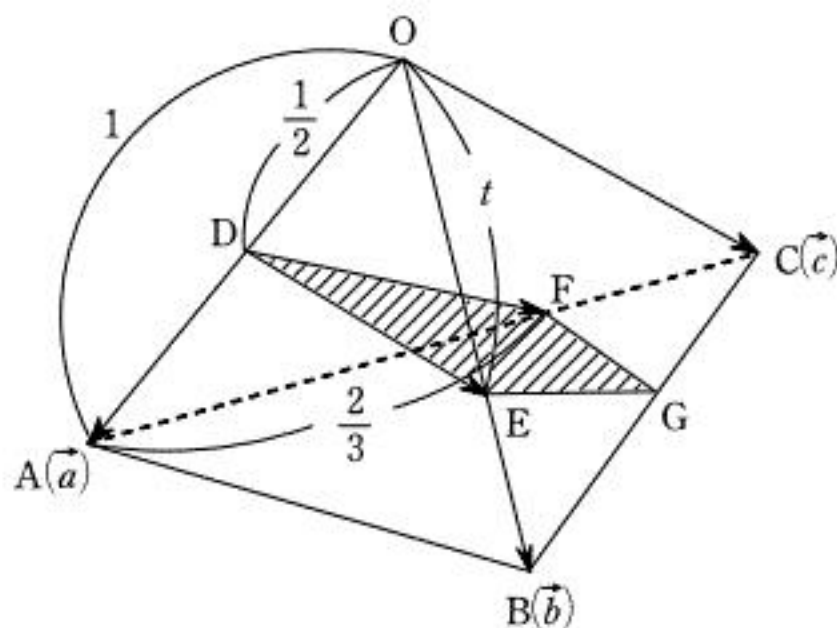
$\therefore \cos(\cos x) > \sin(\sin x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$ は示された。(証明終)

$$(1) \quad \overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$= t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$(2) \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \quad \text{に注意して}$$

$$\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DF} \iff \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a}\right) = 0$$

$$\iff \frac{2}{3}t \cdot \frac{1}{2} - \frac{t}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + x\overrightarrow{DE} + y\overrightarrow{DF} \quad (x \text{ と } y \text{ は実数}) \quad \text{と表せる.}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\vec{a} + x\left(t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + y\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{6}\right)\vec{a} + xt\vec{b} + \frac{2y}{3}\vec{c}$$

ここで、点 G は直線 BC 上より、

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 0 \\ xt + \frac{2y}{3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3tx + 2y = 3 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2-t} \\ y = \frac{3-3t}{2-t} \end{cases}$$

$$\text{これより, } \overrightarrow{OG} = \frac{t}{2-t}\vec{b} + \frac{2-2t}{2-t}\vec{c} = \frac{t\overrightarrow{OB} + (2-2t)\overrightarrow{OC}}{(2-2t)+t}$$

G は辺 BC を $2-2t:t$ の内分点

$$\therefore BG = 1 \cdot \frac{2-2t}{2-2t+t} = \frac{2-2t}{2-t} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(1) y = f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0) \text{ とする.}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \\ = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

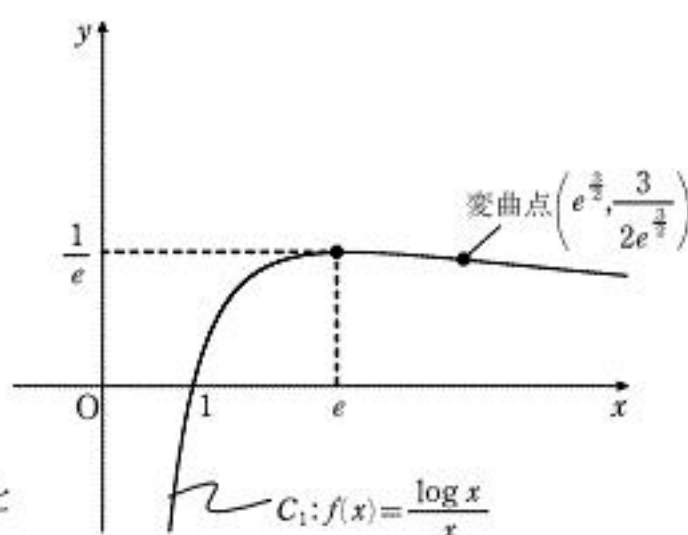
増減表を描くと右の通り.

x	(0)	...	e	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...	$(+\infty)$
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	(変曲点)	$\searrow$	(0)

$$(\text{極大値}) = f(e) = \frac{1}{e}, \text{ 変曲点は, } \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

に注意してグラフ C_1 を描くと右図の通り.



$$(2) y = g(x) = ax^2 \quad (a > 0 \text{ としてよい}) \text{ とする.}$$

$g'(x) = 2ax$ より, 点 P の x 座標を t (> 0) とおくと

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\log t}{t} = at^2 & \dots\dots ① \\ \frac{1 - \log t}{t^2} = 2at & \dots\dots ② \end{cases}$$

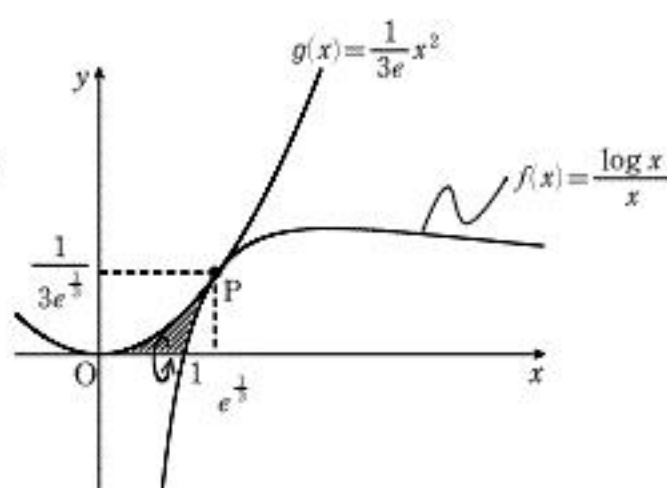
$$①, ② \text{ より, } \log t = \frac{1}{2}(1 - \log t) \iff \log t = \frac{1}{3} \quad \therefore t = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \text{ 点 P } \left(e^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3e^{\frac{1}{3}}} \right), a = \frac{1}{3e} \quad (> 0) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx = \int x^{-2} (\log x)^2 dx = \int \left(-\frac{1}{x} \right)' (\log x)^2 dx \\ = -\frac{1}{x} (\log x)^2 - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ = -\frac{1}{x} (\log x)^2 + 2 \int \frac{1}{x^2} \log x dx \\ = -\frac{1}{x} (\log x)^2 + 2 \int \left(-\frac{1}{x} \right)' \log x dx \\ = -\frac{1}{x} (\log x)^2 - \frac{2}{x} \log x + 2 \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ = -\frac{1}{x} (\log x)^2 - \frac{2}{x} \log x - \frac{2}{x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(4) \quad V = \pi \int_0^{e^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{9e^2} x^4 dx - \pi \int_1^{e^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{45e^2} x^5 \right]_0^{e^{\frac{1}{3}}} + \pi \left[\frac{1}{x} (\log x)^2 + \frac{2}{x} \log x + \frac{2}{x} \right]_1^{e^{\frac{1}{3}}} \\ = \frac{\pi}{45e^2} \cdot e^{\frac{5}{3}} + \pi \left\{ \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{e^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{e^{\frac{1}{3}}} - 2 \right\} \\ = \frac{\pi}{45e^{\frac{1}{3}}} + \frac{25\pi}{9e^{\frac{1}{3}}} - 2\pi \\ = \left(\frac{14}{5e^{\frac{1}{3}}} - 2 \right) \pi \quad \dots\dots(\text{答})$$



(1) $l: px + qy + r = 0$ (p, q, r は実数, $(p, q) \neq (0, 0)$) とおく.

(i) より, 平面上の任意の点 (x, y) の像を (x', y') とすると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad \therefore (x', y') = (ax + by, cx + dy)$$

この (x', y') は常に l 上だから

$$\begin{aligned} px' + qy' + r &= 0 \\ \iff p(ax + by) + q(cx + dy) + r &= 0 \\ \iff (ap + cq)x + (bp + dq)y + r &= 0 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

①は任意の実数 x, y においてつねに成立するから,

$$\begin{cases} ap + cq = 0 \\ bp + dq = 0 \\ \underline{\underline{r = 0}} \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

②より l は $px + qy = 0$ ここで $q = 0$ ($p \neq 0$) とすると, $a = b = 0$ となり,

(iii) に矛盾する. つまり, $q \neq 0$ として考えてもよい.

ここで, $x = t$ (t は任意の実数) とおけば $y = \frac{-pt}{q}$

つまり, l 上の任意の点は $\left(t, -\frac{pt}{q}\right)$ と表せる.

(ii) より, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{pt}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - \frac{bp}{q}t \\ ct - \frac{dp}{q}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから,

$$\begin{cases} \left(a - \frac{bp}{q}\right)t = 0 \\ \left(c - \frac{dp}{q}\right)t = 0 \end{cases}$$

任意の実数 t でこれが成立するなら,

$$\begin{cases} a - \frac{bp}{q} = 0 \\ c - \frac{dp}{q} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots ③$$

②, ③より,

$$\begin{cases} ap + cq = 0 \\ bp + dq = 0 \\ aq - bp = 0 \\ cq - dp = 0 \end{cases} \quad \dots\dots ④$$

さらに, (iii) より, 円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上の任意の点 P は,

$(\cos\theta + 1, \sin\theta + 1)$ (θ は任意の実数) と表せる. この f による像を

(x'', y'') とすれば,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta + 1 \\ \sin\theta + 1 \end{pmatrix}$$

これより,

$$\begin{aligned} x'' &= a\cos\theta + a + b\sin\theta + b \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi) + a + b \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし, } \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ をみたすとする} \end{array} \right)$$

$a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \leq x'' \leq a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ より,

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = -2 \end{cases} \quad \therefore \underline{\underline{(a, b) = (-1, 2) \text{ or } (2, -1)}}$$

○ $(a, b) = (-1, 2)$ のとき,

④より, $\begin{cases} -p + cq = 0 \\ 2p + dq = 0 \\ -q - 2p = 0 \\ cq - dp = 0 \end{cases}$ ここで, $p = 0$ とすると $q = 0$ で矛盾 ($\underline{\underline{p \neq 0, q \neq 0}}$)

これより, $c = -\frac{1}{2}, d = 1, 2p + q = 0$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad l: px - 2py = 0 \ (x - 2y = 0)$$

○ $(a, b) = (2, -1)$ のとき,

④より, $\begin{cases} 2p + cq = 0 \\ -p + dq = 0 \\ 2q + p = 0 \\ cq - dp = 0 \end{cases}$ ここで, $p = 0$ とすると $q = 0$ で矛盾 ($\underline{\underline{p \neq 0, q \neq 0}}$)

これより, $c = 4, d = -2, p + 2q = 0$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad l: px - \frac{1}{2}py = 0 \ (2x - y = 0)$$

以上をまとめて,

$$\underline{\underline{\begin{cases} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & l: x - 2y = 0 \\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} & l: x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})}}$$

(2)

○ $(a, b) = (-1, 2)$ のとき, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ で

$\sin(\theta + \varphi) = 1$ のときだから,

$$\begin{aligned} \sin\theta \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos\theta \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} &= 1 \\ \iff 2\sin\theta - \cos\theta &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sin^2\theta + (2\sin\theta - \sqrt{5})^2 &= 1 \\ \iff 5\sin^2\theta - 4\sqrt{5}\sin\theta + 4 &= 0 \\ \iff (\sqrt{5}\sin\theta - 2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ より, } P\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

○ $(a, b) = (2, -1)$ のとき, $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ で

$\sin(\theta + \varphi) = 1$ のときだから,

$$\begin{aligned} \sin\theta \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} + \cos\theta \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} &= 1 \\ \iff 2\cos\theta - \sin\theta &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} (2\cos\theta - \sqrt{5})^2 + \sin^2\theta &= 1 \\ \iff 5\cos^2\theta - 4\sqrt{5}\cos\theta + 4 &= 0 \\ \iff (\sqrt{5}\cos\theta - 2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ より, } P\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

以上まとめて, $\underline{\underline{\begin{cases} P\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) & (a, b) = (-1, 2) \text{ のとき} \\ P\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) & (a, b) = (2, -1) \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})}}$