

A 2

数 学

(平成 23 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用下さい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入下さい。(1 枚目, 2 枚目は表裏の 2 箇所, 3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題を解答して下さい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせ下さい。
6. 解答は解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入下さい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用下さい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰り下さい。

1 3次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + k$ について、次の問いに答えよ。ただし、 k は定数とする。

(1) $f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる3つの整数解をもつとき、 k の値およびその整数解を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ において、 $|\cos x| = \sin x$ を満たす x を求め、 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $\cos(\cos x)$ 、 $\cos(\sin x)$ の大小を比較せよ。
- (2) $\alpha \geq 0$ 、 $\beta \geq 0$ 、 $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \alpha > \sin \beta$ となることを示し、 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ を示せ。

- 3 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて、3辺OA, OB, AC上にそれぞれ点D, E, Fを $OD = \frac{1}{2}$, $OE = t$ ($0 < t < 1$), $AF = \frac{2}{3}$ となるようにとる。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DF}$ のとき、 t の値を求めよ。

(3) 3点D, E, Fが定める平面が直線BCと交わる点をGとすると、線分BGの長さを t を用いて表せ。

4 xy 平面上の 2 曲線 $C_1: y = \frac{\log x}{x}$ と $C_2: y = ax^2$ は点 P を共有し、 P において共通の接線をもっている。ただし、 a は定数とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ の増減、極値、グラフの凹凸、変曲点を調べ、 C_1 の概形を描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

(2) P の座標および a の値を求めよ。

(3) 不定積分 $\int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx$ を求めよ。

(4) C_1 、 C_2 および x 軸で囲まれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

5 xy 平面上に直線 ℓ がある。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

(i) 平面の点の f による像はすべて ℓ 上にある。

(ii) f は ℓ の点をすべて原点に移す。

(iii) 点 P が円 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 上を動くとき、 f による P の像の x 座標は最大値 $1 + \sqrt{5}$ 、最小値 $1 - \sqrt{5}$ をとる。

次の問いに答えよ。

(1) A を求めよ。また ℓ の方程式を求めよ。

(2) (iii) で最大値 $1 + \sqrt{5}$ をとるときの P の座標を求めよ。