1

(1) $d_k=\dfrac{|x_k\cos\theta+y_k\sin\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=|x_k\cos\theta+y_k\sin\theta|$

$$\begin{aligned}\therefore L&=\sum_{k=1}^{n}{d_k}^2=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\cos\theta+y_k\sin\theta\right)^2\\&=\cos^2\theta\underbrace{\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2}_{a}+2\sin\theta\cos\theta\underbrace{\sum_{k=1}^{n}x_ky_k}_{c}+\sin^2\theta\underbrace{\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2}_{b}\\&=\underline{a\cos^2\theta+2c\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を用いて,

$$\begin{aligned}L&=a\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+c\sin2\theta+b\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}\\&=c\sin2\theta+\frac{a-b}{2}\cos2\theta+\frac{a+b}{2}\\&=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+c^2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$
(ただし, $a\neq b$ または $c\neq0$ とする)

$\left(\text{ただし}, \cos\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+c^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{\frac{a-b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+c^2}}\text{ をみたす}\right)$

ここで, $0\leqq\theta<\pi$ より, $\underline{\underline{\alpha\leqq2\theta+\alpha<2\pi+\alpha}}$ とわかる.

・$\sin(2\theta+\alpha)=1$ で最大となり, (L の最大値) $=\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+c^2}+\dfrac{a+b}{2}$

・$\sin(2\theta+\alpha)=-1$ で最小となり, (L の最小値) $=-\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+c^2}+\dfrac{a+b}{2}$

(注意: $a=b$ かつ $c=0$ のとき, (L の最大値) = (L の最小値) $=a$ となるが, 上記の答えはそれをみたす)

(3) (2) より, $L=\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+c^2}\sin(2\theta+\alpha)+\dfrac{a+b}{2}$ より,

$a\neq b$ または $c\neq0$ から $\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+c^2}>0$ とわかる.

L を最大にするときの ($\sin(2\theta+\alpha)=1$ をみたすとき) θ を θ_1 とすれば,

$2\theta_1+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (n: 整数)

$\Longleftrightarrow\ \theta_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}+n\pi$ ……①

L を最小にするときの ($\sin(2\theta+\alpha)=-1$ をみたすとき) θ を θ_2 とすれば,

$2\theta_2+\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi$ (m: 整数)

$\Longleftrightarrow\ \theta_2=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}+m\pi$ ……②

ここで, ($\theta=\theta_1$ のとき) $l_1: x\cos\theta_1+y\sin\theta_1=0$

法線ベクトル $\overrightarrow{m_1}=(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$

($\theta=\theta_2$ のとき) $l_2: x\cos\theta_2+y\sin\theta_2=0$

法線ベクトル $\overrightarrow{m_2}=(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$

ここで,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2+\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\&=\cos(\theta_1-\theta_2)\\&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+(n-m)\pi\right\}\\&=0\end{aligned}$$

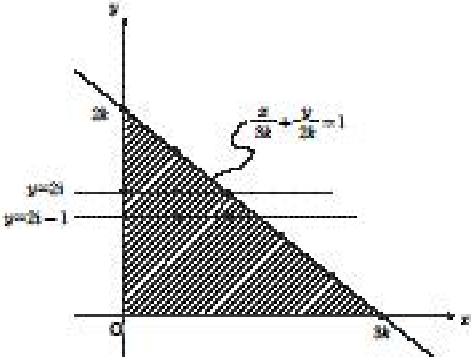
①, ②より, $\theta_1-\theta_2=\dfrac{\pi}{2}+(n-m)\pi$

$\therefore\ \overrightarrow{m_1}\perp\overrightarrow{m_2}\ \Longleftrightarrow\ l_1\perp l_2$ (これより, 題意は示された)

2

（1）(i) $k=0$ のとき，$(x,y)=(0,0)$ のみ　1個　$\therefore\ a_0=1$

(ii) $k\geqq 1$ のとき，$\dfrac{x}{3k}+\dfrac{y}{2k}\leqq 1$



・$y=2i\ (0\leqq i\leqq k)$ 上の格子点の数を α_{2i}

$$\alpha_{2i}=3k-3i+1\quad（個）$$

・$y=2i-1\ (1\leqq x\leqq k)$ 上の格子点の数を α_{2i-1}

$$\alpha_{2i-1}=3k-3i+2\quad（個）$$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_k&=\sum_{i=0}^{k}\alpha_{2i}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{2i-1}\\&=\sum_{i=0}^{k}(-3i+3k+1)+\sum_{i=1}^{k}(-3i+3k+2)\\&=-3\cdot\frac{k}{2}(k+1)+(3k+1)(k+1)-3\cdot\frac{k}{2}(k+1)+k(3k+2)\\&=3k^2+3k+1\quad（個）\end{aligned}$$

この　$a_k=3k^2+3k+1$ は $k=0$ のときも満たすから，

$\therefore\ \underline{a_k=3k^2+3k+1\ （個）\ (k\geqq 0)}$

（2）　$z=i\ (0\leqq i\leqq n)$ について調べる．

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq n-i$$

これをみたす0以上の格子点の組の個数は，

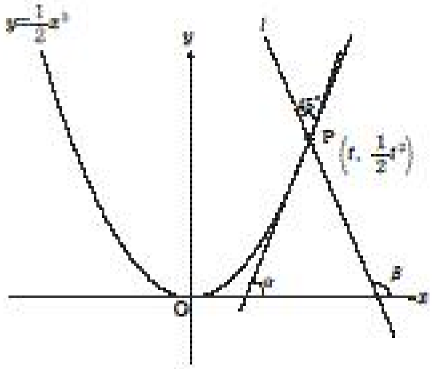
$$\begin{aligned}a_{n-i}&=3(n-i)^2+3(n-i)+1\\&=3i^2-3(2n+1)i+3n^2+3n+1\ （個）\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ b_n&=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left\{3i^2-3(2n+1)i+3n^2+3n+1\right\}\\&=3\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-3(2n+1)\cdot\frac{n}{2}(n+1)+(3n^2+3n+1)(n+1)\\&=\underline{(n+1)^3}\ （個）\end{aligned}$$

3

(1)　点$\mathrm{P}\left(t,\frac{1}{2}t^2\right)$での接線，$l$が$x$軸の正の方向となす

角を各々α，βとおく．



$$\beta=\alpha+45° \quad \cdots\cdots①$$

$y=\frac{1}{2}x^2$より，$y'=x$

（Pでの接線の傾き）$=t$　　　$\therefore\ \tan\alpha=t$

ここで，

$$\tan\beta=\tan(\alpha+45°)$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan45°}{1-\tan\alpha\cdot\tan45°}$$
$$=\frac{t+1}{1-t}\left(=\underline{l\text{の傾き}}\right)$$

$$\therefore\ l:y=\frac{1+t}{1-t}(x-t)+\frac{t^2}{2} \iff \underline{l:y=\frac{1+t}{1-t}x-\frac{t(2+t+t^2)}{2(1-t)}}$$

(2)

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1+t}{1-t}x-\frac{t(2+t+t^2)}{2(1-t)}$$
$$\iff (1-t)x^2-2(1+t)x+t(2+t+t^2)=0$$
$$\iff \{(1-t)x-(2+t+t^2)\}(x-t)=0 \qquad \therefore\ x=\frac{2+t+t^2}{1-t},\ t$$

$$\therefore\ S(t)=\left|\int_{\frac{2+t+t^2}{1-t}}^{t}\left\{\frac{1+t}{1-t}x-\frac{t(2+t+t^2)}{2(1-t)}-\frac{1}{2}x^2\right\}dx\right|$$
$$=\left|-\frac{1}{2}\int_{\frac{2+t+t^2}{1-t}}^{t}\left(x-\frac{2+t+t^2}{1-t}\right)(x-t)dx\right|$$
$$=\frac{1}{12}\left|\left(\frac{-2-2t^2}{1-t}\right)^3\right|=\frac{2}{3}\left|\left(\frac{1+t^2}{1-t}\right)^3\right|$$

$$\therefore\ \underline{S(t)=\frac{2}{3}\left|\left(\frac{1+t^2}{1-t}\right)^3\right|\ (\text{ただし，}t\neq1)}$$

(3)　$\frac{1+t^2}{1-t}=k$　（k：実数）とおく．

（与式）$\iff 1+t^2=k-kt$

$$\iff t^2+kt+1-k=0 \quad \cdots\cdots②$$

②が$t\neq1$の実解をもてばよい．

$$\begin{cases}1+k+1-k\neq0\\ D=k^2-4(1-k)\geqq0\end{cases} \iff \begin{cases}2\neq0\\ k^2+4k-4\geqq0\end{cases}$$
$$\therefore\ k\leqq-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}\leqq k$$

ここで，$S(t)=\frac{2}{3}\left|k^3\right|$だから，$\underline{k=-2+2\sqrt{2}\text{のとき，}S(t)\text{は最小}}$

②へ代入し，

$$t^2+2(\sqrt{2}-1)t+3-2\sqrt{2}=0 \quad \cdots\cdots②$$

$$\iff \left\{t+(\sqrt{2}-1)\right\}^2=0 \qquad \therefore\ \underline{t=1-\sqrt{2}}$$