1

(1) $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\sin x}{1+\cos x}dx$ とおく.

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx+\underbrace{\Big[-\log(1+\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}}_{\log\frac{3}{2}}$$

$$=\left[2\tan\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}+\log\frac{3}{2}$$

$$=\underline{2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\log\frac{3}{2}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3x}$ $(x\neq 0,\ 3)$ とおく.

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2-3x)-\sqrt{x^2+1}\cdot(2x-3)}{\left(x^2-3x\right)^2}$$

$$=\frac{-(x-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2-3x\right)^2}$$

増減表を描くと下の通り.

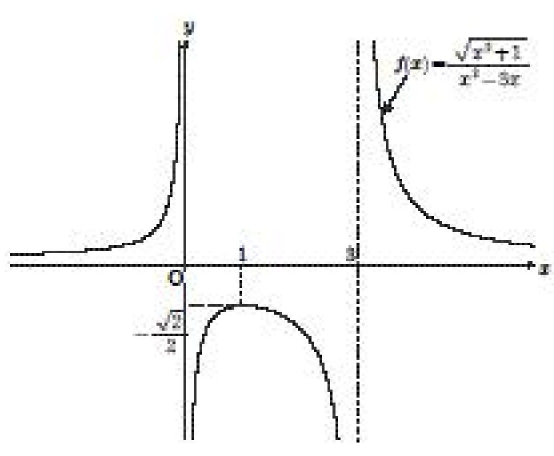
x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$ $(+\infty)$	$\times$	$(+\infty)$ $\nearrow$	極大 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$ $(-\infty)$	$\times$	$(-\infty)$ $\searrow$	(0)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to-0}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+0}f(x)=-\infty,$

$\displaystyle\lim_{x\to3-0}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to3+0}f(x)=+\infty$

$\therefore$ (極大値) $=f(1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

グラフを描くと右図の通り.



2

(1) $XY=YX$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2a+3b=-2a+3c \\ 3a+6b=-2b+3d \\ -2c+3d=3a+6c \\ 3c+6d=3b+6d \end{cases} \qquad \therefore \underline{\begin{cases} c=b \\ d=\dfrac{3a+8b}{3} \end{cases}}$$

(2) 行列 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & \dfrac{3a+8b}{3} \end{pmatrix}$ （∵（1））を用いて，ケーリー・ハミルトンの公式より，

$$X^2-\frac{6a+8b}{3}X+\left(a^2+\frac{8}{3}ab-b^2\right)E=0 \quad \cdots\cdots①$$

この①と $X^2=E$ ……② を連立して，

$$\frac{6a+8b}{3}X=\left(a^2+\frac{8}{3}ab-b^2+1\right)E \quad \cdots\cdots③$$

(i) $6a+8b\neq 0$（つまり $b\neq -\dfrac{3}{4}a$）のとき，

③より，$\underline{\underline{X=kE}}$（$k$：実数）と表せる．

②を連立して，$(k^2-1)E=0 \qquad \therefore k=\pm 1$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ （いずれも $b=0$ となり不適）

(ii) $6a+8b=0$（つまり $b=-\dfrac{3}{4}a$）のとき，③より，

$$a^2+\frac{8}{3}ab-b^2+1=0$$

$$\iff a^2+\frac{8}{3}a\left(-\frac{3}{4}a\right)-\left(-\frac{3}{4}a\right)^2+1=0$$

$$\iff a^2=\frac{16}{25} \qquad \therefore a=-\frac{4}{5} \quad \left(b=-\frac{3}{4}a>0 \text{ より } a<0\right)$$

$$\therefore (a, b)=\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \qquad \therefore X=\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

以上(i)，(ii)より，$\underline{X=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$

(3)

(i) $x=p$（p：実数）のとき，l 上の任意の点 (p, s) の像は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4p+3s \\ 3p+4s \end{pmatrix}$$

実数 s の値に関係なく $x'=p$ とならず不適．

(ii) $y=mx+n$（m, n：実数）のとき，l 上の任意の点 $(t, mt+n)$ の像は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4t+3mt+3n \\ 3t+4mt+4n \end{pmatrix}$$

この $(x', y')=\left(\dfrac{1}{5}\{(3m-4)t+3n\}, \dfrac{1}{5}\{(4m+3)t+4n\}\right)$ も l 上だから，

$$\frac{1}{5}\{(4m+3)t+4n\}=m\cdot\frac{1}{5}\{(3m-4)t+3n\}+n$$

$$\iff (3m^2-8m-3)t+3mn+n=0$$

これが任意の実数 t で成立するから

$$\begin{cases} (3m+1)(m-3)=0 \\ n(3m+1)=0 \end{cases}$$

$$\therefore (m, n)=\left(-\frac{1}{3}, \text{任意の実数}\right), (3, 0)$$

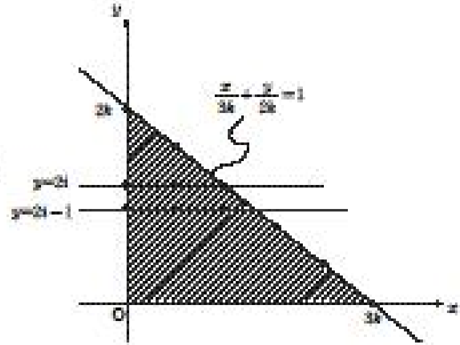
以上(i)，(ii)より，

$\underline{y=-\dfrac{1}{3}x+n \text{（}n\text{：任意の実数）}, y=3x}$

3

（1）　(i)　$k=0$ のとき，$(x,y)=(0,0)$ のみ　　1 個　　$\therefore\ a_0=1$

(ii)　$k\geqq 1$ のとき，$\dfrac{x}{3k}+\dfrac{y}{2k}\leqq 1$



・$y=2i$ $(0\leqq i\leqq k)$ 上の格子点の数を α_{2i}

$\alpha_{2i}=3k-3i+1$ （個）

・$y=2i-1$ $(1\leqq x\leqq k)$ 上の格子点の数を α_{2i-1}

$\alpha_{2i-1}=3k-3i+2$ （個）

$$\begin{aligned}\therefore\ a_k&=\sum_{i=0}^{k}\alpha_{2i}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{2i-1}\\&=\sum_{i=1}^{k}(-3i+3k+1)+\sum_{i=1}^{k}(-3i+3k+2)\\&=-3\cdot\frac{k}{2}(k+1)+(3k+1)(k+1)-3\cdot\frac{k}{2}(k+1)+k(3k+2)\\&=3k^2+3k+1\quad（個）\end{aligned}$$

この　$a_k=3k^2+3k+1$ は $k=0$ のときも満たすから，

$\therefore$ $\underline{a_k=3k^2+3k+1\ （個）\ (k\geqq 0)}$

（2）　$z=i$ $(0\leqq i\leqq n)$ について調べる。

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq n-i$$

これをみたす 0 以上の格子点の組の個数は，

$$\begin{aligned}a_{n-i}&=3(n-i)^2+3(n-i)+1\\&=3i^2-3(2n+1)i+3n^2+3n+1\ （個）\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ b_n&=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left\{3i^2-3(2n+1)i+3n^2+3n+1\right\}\\&=3\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-3(2n+1)\cdot\frac{n}{2}(n+1)+(3n^2+3n+1)(n+1)\\&=\underline{(n+1)^3}\ （個）\end{aligned}$$

4

（1）$I=\int x^2\cos(a\log x)\,dx$ とおく．

$$I=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\cos(a\log x)dx=\frac{x^3}{3}\cos(a\log x)+\int\frac{x^3}{3}\sin(a\log x)\cdot\frac{a}{x}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\cos(a\log x)+\frac{a}{3}\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\sin(a\log x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\cos(a\log x)+\frac{a}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\sin(a\log x)-\frac{a}{3}\int\frac{x^3}{3}\cos(a\log x)\cdot\frac{a}{x}dx$$

$$=\frac{x^3}{9}\{3\cos(a\log x)+a\sin(a\log x)\}-\frac{a^2}{9}I$$

$$\Longleftrightarrow\quad\frac{a^2+9}{9}I=\frac{x^3}{9}\{3\cos(a\log x)+a\sin(a\log x)\}$$

$$\therefore\ \underline{I=\frac{x^3\{3\cos(a\log x)+a\sin(a\log x)\}}{a^2+9}+C}\quad\text{（ただし, }C\text{ は積分定数）}$$

（2）求める回転体の体積を V とおく．

$$V=\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}\pi\{x\cos(\log x)\}^2\,dx$$

$$=\pi\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^2\cos^2(\log x)\,dx=\pi\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^2\,\frac{1+\cos(2\log x)}{2}dx$$

(1)の結果を利用
$(a=2)$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{13}\{3\cos(2\log x)+2\sin(2\log x)\}\right]_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}$$

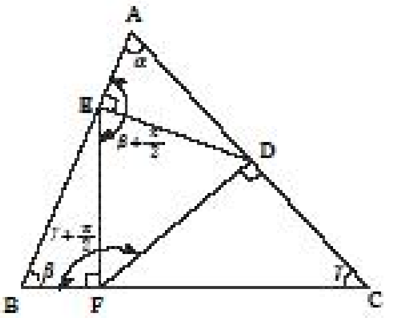
$$=\frac{\pi}{6}\left(e^{\frac{3\pi}{4}}-1\right)+\frac{\pi}{26}\left\{e^{\frac{3\pi}{4}}\left(3\cos\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}\right)-(3+0)\right\}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{78}\left(19e^{\frac{3}{4}\pi}-22\right)}$$

5

（1）　三角形CDFで外角の定理より，

$$\gamma+\frac{\pi}{2}=\angle \mathrm{BFD} \qquad \therefore\ \angle \mathrm{EFD}=\gamma$$



三角形BFEで外角の定理より，

$$\beta+\frac{\pi}{2}=\angle \mathrm{AEF} \qquad \therefore\ \angle \mathrm{DEF}=\beta$$

これより，三角形ABCと三角形DEFにおいて，

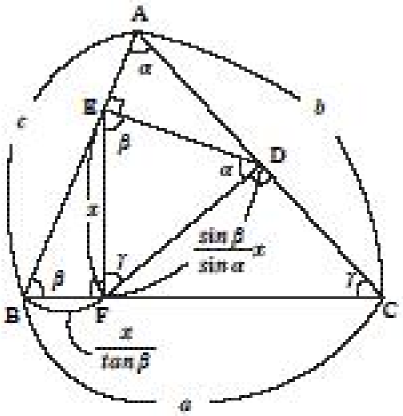
$\angle\beta=\angle \mathrm{DEF}\ (=\beta)$

$\angle\gamma=\angle \mathrm{EFD}\ (=\gamma)$

より，2角相等．これより，　三角形ABC∽三角形DEF　（証明終）

（2）　$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$としてもよい．

ただし，$\begin{cases} b^2+c^2-a^2>0 \\ c^2+a^2-b^2>0 \\ a^2+b^2-c^2>0 \end{cases}$　を満たす．



ここで，$\mathrm{EF}=x\ (>0)$とおくと，

$$\tan\beta=\frac{x}{\mathrm{BF}} \iff \mathrm{BF}=\frac{x}{\tan\beta} \quad \cdots\cdots①$$

三角形DEFで正弦定理より，

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{DF}}{\sin\beta} \iff \mathrm{DF}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x$$

ここで，$\sin\gamma=\dfrac{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x}{\mathrm{CF}} \iff \mathrm{CF}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}x \quad \cdots\cdots②$

①，②より，$\mathrm{BF}+\mathrm{CF}=\underline{\underline{\dfrac{x}{\tan\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}x}}=\mathrm{BC}\ (=a)$

辺々を$x(\mathrm{EF})$で割れば，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin\{\pi-(\alpha+\gamma)\}}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}\\&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}\\&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}\end{aligned}$$

$\therefore\ \underline{\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}\ （証明終）}$

（3）　（2）より，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}&=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\\&=\frac{\cos\beta\cdot\sin\gamma+\sin\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\frac{1}{\tan\alpha}\\&=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\frac{1}{\tan\alpha}\\&=\frac{\boxed{\sin(\pi-\alpha)}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\boxed{\frac{1}{\tan\alpha}}\end{aligned}$$

（一定の正の値）

そこで，$\sin\beta\cdot\sin\gamma$について考える．

$$\begin{aligned}\sin\beta\cdot\sin\gamma&=-\frac{1}{2}\{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\beta-\gamma)\}\\&=-\frac{1}{2}\{\cos(\pi-\alpha)-\cos(\beta-\gamma)\}\\&=\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha\}\end{aligned}$$

ここで$\beta=\gamma$ $\left(\alpha+\beta+\gamma=\pi より，\beta=\gamma=\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)$のとき，

$\sin\beta\cdot\sin\gamma$は正の最大値をとり，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}$は最小となる．

$$\therefore\ \underline{\beta=\gamma=\frac{\pi-\alpha}{2}}$$