

A 2

数 学

(平成 24 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(1 枚目, 2 枚目は表裏の 2 箇所, 3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には 5 つの問題があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後, 問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 + \sin x}{1 + \cos x} dx$ を求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 3x}$ の増減、極値を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、
グラフの凹凸、変曲点は調べなくてよい。

2 行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ は $XY = YX$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) c, d を a, b を用いて表せ。

(2) $X^2 = E$, $b > 0$ のとき, X を求めよ。ただし, E は単位行列とする。

(3) xy 平面上に直線 ℓ があり, (2) で求めた行列 X の表す 1 次変換によって ℓ 上の点はすべて ℓ 上の点に移される。 ℓ の方程式を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) k を 0 以上の整数とするとき,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq k$$

を満たす 0 以上の整数 x, y の組 (x, y) の個数を a_k とする。 a_k を k の式で表せ。

- (2) n を 0 以上の整数とするとき,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z \leq n$$

を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組 (x, y, z) の個数を b_n とする。 b_n を n の式で表せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分

$$\int x^2 \cos(a \log x) dx$$

を求めよ。ただし、 a は 0 でない定数とする。

(2) 曲線 $y = x \cos(\log x)$ と x 軸、および 2 直線 $x = 1$, $x = e^{\frac{\pi}{4}}$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

5 鋭角三角形 ABC の $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさをそれぞれ α , β , γ で表す。点 D, E, F はそれぞれ辺 CA, AB, BC 上にあり, $DE \perp AB$, $EF \perp BC$, $FD \perp CA$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似であることを示せ。

(2) $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma}$ を示せ。

(3) α が一定のとき, $\frac{BC}{EF}$ を最小にするような β , γ を α で表せ。