1

(1) $$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

$\iff a^2=a^2-2a+14+2(xy+yz+zx)$ $\therefore\ xy+yz+zx=a-7$ （答）

次に $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$\iff a^3-3a^2+3a+18-3xyz=a(a^2-2a+14-a+7)$

$\iff 3xyz=-18a+18$ $\therefore\ xyz=6-6a$ （答）

(2) x,y,zを3つの実数解にもつtの3次方程式は

$(t-x)(t-y)(t-z)=0$

$\iff t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$

$\iff t^3-at^2+(a-7)t+6a-6=0$

$\iff (t+1-a)(t+2)(t-3)=0$ $\therefore\ t=a-1,-2,\ 3$

(i) $a-1=-2$ $(a=-1)$のとき (x,y,z)は$\underline{\underline{(-2,-2,3)}}$
（順番は任意）

(ii) $a-1=3$ $(a=4)$のとき (x,y,z)は$\underline{\underline{(-2,3,3)}}$
（順番は任意）

以上より，(x,y,z)は

$$\left.\begin{array}{ll}\underline{\underline{(-2,-2,3)}}\ \text{（順番は任意）} & (a=-1)\text{ のとき}\\ \underline{\underline{(-2,3,3)}}\ \text{（順番は任意）} & (a=4)\text{ のとき}\end{array}\right\}$$ （答）

2

(1) $y=\left|x^2-xt\right|=\left|x(x-t)\right|$ と $y=\left|t-2x\right|$ の $0\leqq t\leqq 2$ での絶対値のはずれ方に注意して

$\underset{(A)}{\underline{\underline{\int_0^2\left|x^2-xt\right|dt}}}$ と $\underset{(B)}{\underline{\underline{\int_0^2\frac{1}{2}\left|t-2x\right|dt}}}$ に分けて考える．

・(*A*) について…

（i） $x\leqq 0$ のとき $\int_0^2(t^2-xt)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{x}{2}t^2\right]_0^2=-2x+\frac{8}{3}$

（ii） $0\leqq x\leqq 2$ のとき $\int_0^x(xt-t^2)dt+\int_x^2(t^2-xt)dt$

$$=\left[\frac{x}{2}t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{x}{2}t^2\right]_x^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{8}{3}$$

（iii） $2\leqq x$ のとき $\int_0^2(xt-t^2)dt=\left[\frac{x}{2}t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^2=2x-\frac{8}{3}$

・(*B*) について…

（i） $x\leqq 0$ のとき $\int_0^2\frac{1}{2}(t-2x)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-2xt\right]_0^2=-2x+1$

（ii） $0\leqq x\leqq 1$ のとき $\int_0^{2x}\frac{1}{2}(2x-t)dt+\int_{2x}^2\frac{1}{2}(t-2x)dt$

$$=\frac{1}{2}\left[2xt-\frac{t^3}{2}\right]_0^{2x}+\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-2xt\right]_{2x}^2$$

$$=2x^2-2x+1$$

（iii） $1\leqq x$ のとき $\int_0^2\frac{1}{2}(2x-t)dt=2x-1$

以上 (*A*)，(*B*) をまとめて

$$(A)=\begin{cases}-2x+\frac{8}{3} & (x\leqq 0)\\ \frac{1}{3}x^3-2x+\frac{8}{3} & (0\leqq x\leqq 2)\\ 2x-\frac{8}{3} & (2\leqq x)\end{cases}\qquad (B)=\begin{cases}-2x+1 & (x\leqq 0)\\ 2x^2-2x+1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 2x-1 & (1\leqq x)\end{cases}$$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-4x+\frac{11}{3} & (x\leqq 0)\\ \frac{1}{3}x^3+2x^2-4x+\frac{11}{3} & (0\leqq x\leqq 1)\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3} & (1\leqq x\leqq 2)\\ 4x-\frac{11}{3} & (2\leqq x)\end{cases}$$ （答）

(2) $(0\leqq x\leqq 1)$ において，$f(x)=x^2+4x-4$

$f'(x)=0$ の解は，$x=-2+2\sqrt{2}$

増減表を描くと下記の通り．（$x=0,1,2$ で連続であることに注意）

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	↘		↘	(最小)	↗		↗		↗

$\therefore\ x=-2+2\sqrt{2}$ で $f(x)$ は最小値をとる． （答）

3

(1)
$$\frac{2013}{1}=2013 \quad \cdots \quad (\text{余り } 0)$$
$$\frac{2013}{2}=1006 \quad \cdots \quad (\text{余り } 1)$$
$$\frac{2013}{3}=671 \quad \cdots \quad (\text{余り } 0)$$
$$\frac{2013}{4}=503 \quad \cdots \quad (\text{余り } 1)$$
$$\frac{2013}{5}=402 \quad \cdots \quad (\text{余り } 3)$$
$$\frac{2013}{6}=335 \quad \cdots \quad (\text{余り } 3)$$
$$\therefore\ \underset{「0」}{a_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}},\ \underset{「1」}{b_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}},\ \underset{「3」}{c_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}} \qquad (\text{答})$$

(2) $(n-1)$ 回目と n 回目の推移図を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & (n-1)\text{回目} & n\text{回目} \\
\text{「0」を表示} & a_{n-1} \arrow[r, "\times 1"] & a_n \\
\text{「1」を表示} & b_{n-1} \arrow[ur, "\times\frac{1}{6}"] & b_n \\
\text{「3」を表示} & c_{n-1} \arrow[uur, "\times\frac{2}{6}"] & c_n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} a_n=1\cdot a_{n-1}+\dfrac{1}{6}\cdot b_{n-1}+\dfrac{2}{6}\cdot c_{n-1} \\ b_n=0\cdot a_{n-1}+\dfrac{5}{6}\cdot b_{n-1}+\dfrac{1}{6}\cdot c_{n-1} \\ c_n=0\cdot a_{n-1}+0\cdot b_{n-1}+\dfrac{3}{6}\cdot c_{n-1} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{6}\cdot b_{n-1}+\dfrac{1}{3}\cdot c_{n-1} & \cdots\cdots① \\ b_n=\dfrac{5}{6}\cdot b_{n-1}+\dfrac{1}{6}\cdot c_{n-1} & \cdots\cdots② \\ c_n=\dfrac{1}{2}\cdot c_{n-1} & \cdots\cdots③ \end{cases} \qquad (\text{答})$$

(3) $a_1=\frac{1}{3},\ b_1=\frac{1}{3},\ c_1=\frac{1}{3}$ より，

③から $\quad c_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

これを②へ代入して，

$$b_n=\frac{5}{6}b_{n-1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$\iff b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\iff b_{n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{5}{6}\left\{b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$\therefore\ b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これらを①へ代入して，

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=\frac{1}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n\geqq 2)\quad a_n&=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\} \\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right\} \\ &=1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n=1\text{ もみたす}) \end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ c_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad (n=1,\,2,\,3\cdots) \qquad (\text{答})$$