

A 2

数 学

(平成 25 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(1 枚目, 2 枚目は表裏の 2 箇所, 3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には, 問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後, 問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{1 + 2\sqrt{x}} \, dx$ を求めよ。

2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^2 = A$ を満たす。

行列 B は $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $a + d$, $ad - bc$ を求めよ。

(2) B を a を用いて表せ。

(3) $c = 1$ のとき, 実数 s, t に対して

$$(sA + tB)^n = x_n A + y_n B \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表されることを示し, x_n, y_n を s, t, n を用いて表せ。

- 3 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し, xy 平面の第 1 象限の点 P および x 軸の正の部分にある点 Q を

$$\angle QOP = \theta, \angle PQO = 2\theta, PQ = 1$$

を満たすようにとる。 PQ の中点を R とする。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき, P の軌跡を C_1 , R の軌跡を C_2 とする。 O は xy 平面の原点である。 次の問いに答えよ。

- (1) P, Q, R の座標を θ を用いて表せ。
- (2) C_1, C_2 を求め, それらを図示せよ。
- (3) C_1, C_2 および x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

- 4 1つの整数を表示する装置がある。最初に 2013 が表示されている。さいころを 1 回投げるたびに次の操作(*)を行う。

(*)表示されている整数をさいころの出た目の数で割った余り r を求め、装置に r を表示させる。

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が 0 である確率を a_n 、1 である確率を b_n 、3 である確率を c_n とする。

次の問いに答えよ。

- (1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。
- (2) a_n, b_n, c_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n, c_n を n の式で表せ。

5 関数 $f(x) = e^{ax}$ ($a > 0$) と次の条件 (ア), (イ) を満たす関数 $g(x)$ がある。

(ア) $y = g(x)$ のグラフは半円

$$\begin{cases} (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \\ y < q \end{cases}$$

である。ただし、 $p < 0$, $q > 0$, $r > |p|$ とする。

(イ) $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$

次の問いに答えよ。

(1) p , q , r を a を用いて表せ。

(2) a がすべての正の実数を動くとき、 r を最小にする a の値を求めよ。