1

(1)

$$x^3+ax^2+x-2=bx-2$$
$$\iff x^3+ax^2+(1-b)x=0$$
$$\iff x\{x^2+ax+(1-b)x\}=0 \quad \cdots\cdots①$$

これより，$x^2+ax+(1-b)x$ が $x \neq 0$ の異なる 2 実解をもてばよい．

$$\begin{cases} D=a^2-4(1-b)>0 \\ 1-b\neq 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} b>-\dfrac{a^2}{4}+1 \\ b\neq 1 \end{cases} \cdots\cdots② \text{（答）}$$

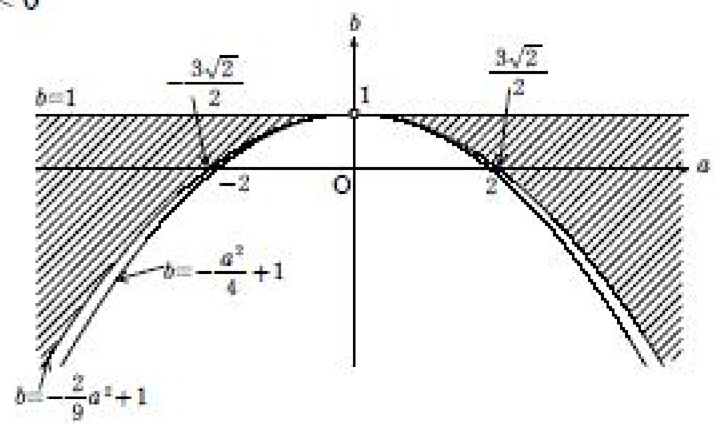
(2)　①より，$x=\alpha, \beta, 0$　（ただし，$\alpha\neq 0, \beta\neq 0, \alpha+\beta=-a, \alpha\beta=1-b$）

$f(x)=x^3+ax^2+x-2$ とおき，$f'(x)=3x^2+2ax+1$ から $f'(0)=1$ とわかるから，

$$\left(f'(\alpha)>1, f'(\beta)<1\right) \quad \text{または} \quad \left(f'(\alpha)<1, f'(\beta)>1\right)$$

$$\{f'(\alpha)-1\}\{f'(\beta)-1\}<0$$
$$\iff (3\alpha^2+2a\alpha)(3\beta^2+2a\beta)<0$$
$$\iff 9\alpha^2\beta^2+6a\alpha\beta(\alpha+\beta)+4a^2\alpha\beta<0$$
$$\iff 9(1-b)^2+6a(1-b)\cdot(-a)+4a^2(1-b)<0$$
$$\iff (1-b)\{9(1-b)-2a^2\}<0$$

$$\therefore \begin{cases} b<1 \\ b>-\dfrac{2}{9}a^2+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b>1 \\ b<-\dfrac{2}{9}a^2+1 \end{cases}$$



②の条件に注意して ab 平面上に図示すると

右図の斜線部分（ただし，境界は含まず）

2

(1) Aを通り，$\overrightarrow{OC}$ に平行な直線を l とする．実数 α を用いて，

$$l:(x,y,z)=(-2,1,3)+\alpha(1,3,4)$$

Bを通り，$\overrightarrow{OD}$ に平行な直線を m とする．実数 β を用いて，

$$m:(x,y,z)=(s,3,-1)+\beta(1,2,2)$$

ここで，

$$\begin{cases}-2+\alpha=s+\beta & \cdots\cdots① \\ 1+3\alpha=3+2\beta & \cdots\cdots② \\ 3+4\alpha=-1+2\beta & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②，③を同時に満たす実数 α,β が存在 $\begin{cases}\alpha=-6 \\ \beta=-10\end{cases}$

$\therefore\ s=2,\mathrm{P}(-8,-17,-21)$ （答）

(2) $\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{OC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{PB}\right|}{\left|\overrightarrow{OD}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ だから，$\begin{cases}\overrightarrow{PA}=(6,18,24), & \left|\overrightarrow{PA}\right|=6\sqrt{26} \\ \overrightarrow{PB}=(10,20,20), & \left|\overrightarrow{PB}\right|=30\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{6\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=\dfrac{30}{3|t|} \iff |t|=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{6\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=\dfrac{6}{\sqrt{9t^2-30t+26}} \iff (3t-5)^2=0\end{cases} \qquad \therefore\ t=\frac{5}{3} \quad （答）$$

(3) 実数 x，y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OP}+x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB} \\ &=(-8,-17,-21)+x(6,18,24)+y(10,20,20) \\ &=(6x+10y-8,18x+20y-17,24x+20y-21)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{DH}=\left(6x+10y-\frac{29}{3},18x+20y-\frac{61}{3},24x+20y-\frac{73}{3}\right)$$

ここで，$\begin{cases}\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{PA} \\ \overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{PB}\end{cases}$ より，$\begin{cases}26x+25y=28 & \cdots\cdots④ \\ 10x+10y=11 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$

④，⑤から，$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{3}{5}$

$\overrightarrow{OH}=(1,4,3)$ より，$\mathrm{H}=(1,4,3)$ （答）

3

(1)

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}r^{ak}$$
$$=r^{a_1}-r^{a_2}+r^{a_3}-r^{a_4}+\cdots+r^{a_{2n-1}}-r^{a_{2n}}$$
$$=r^0\underbrace{-r^1+r^1}_{0}\underbrace{-r^2+r^2}_{0}\underbrace{-r^3+r^3}_{0}\underbrace{-r^4+r^4}_{0}\underbrace{-\cdots\cdots}_{\cdots\cdots}\underbrace{\cdots+r^{n-1}}_{0}-r^n$$
$$=r^0-r^n$$
$$\therefore\ S_{2n}=1-r^n \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{3n}(-1)^{k-1}r^{ak}$$
$$=r^{a_1}-r^{a_2}+r^{a_3}-r^{a_4}+r^{a_5}-\cdots+(-1)^{3n-1}r^{a_{3n}}$$
$$=r^0-r^0+r^1-r^1+r^1-r^2+r^2-r^2+r^3-r^3+r^3-r^4+\cdots\cdots$$
$$=\underbrace{r^1-r^2+r^3-r^4+r^5-r^6+\cdots\cdots}_{\text{初項 }r\text{, 公比 }-r\text{ の }n-1\text{ 項の和}}+(-1)^{3n-1}r^n$$
$$=\frac{r\{1-(-r)^{n-1}\}}{1-(-r)}+(-1)^{3n-1}r^n$$
$$\therefore\ S_{3n}=\frac{r\{1-(-r)^{n-1}\}}{1-(-r)}+(-1)^{3n-1}r^n \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$S_{2014}=0 \iff r^{a_1}+r^{a_3}+r^{a_5}+\cdots+r^{a_{2013}}=r^{a_2}+r^{a_4}+r^{a_6}+\cdots+r^{a_{2014}} \cdots\cdots ①$$

ここで,

$$T=\sum_{k=1}^{2014}r^{a_k}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots+r^{a_{2013}}+r^{a_{2014}}$$
$$=2\left(r^{a_2}+r^{a_4}+r^{a_6}+\cdots+r^{a_{2014}}\right)$$

$0<r<1$ より,各 a_i の値が大きいほど,全体の T は小さくなる.$(0\leqq i\leqq 2014)$

①に注意すれば,

$$\left(r^{a_1}=r^{a_2},\ r^{a_3}=r^{a_4},\ r^{a_5}=r^{a_6},\ \cdots\cdots,\ \text{つまり},\ a_1=a_2,\ a_3=a_4,\ a_5=a_6,\ \cdots\right)$$
$$\underset{(0)}{a_1}\leqq\underset{(0)}{a_2}\leqq\underset{(1)}{a_3}\leqq\underset{(1)}{a_4}\leqq\underset{(2)}{a_5}\leqq\underset{(2)}{a_6}\leqq\underset{(3)}{a_7}\leqq\underset{(3)}{a_8}\leqq\cdots\cdots\leqq\underset{(1006)}{a_{2013}}\leqq\underset{(1006)}{a_{2014}}$$

$$\therefore\quad (T\text{ の最小値})=2\left(r^0+r^1+r^2+\cdots\cdots+r^{1006}\right)=\frac{2\left(1-r^{1007}\right)}{1-r} \qquad \text{(答)}$$
$$\left(a_{2014}=1006\right) \qquad \text{(答)}$$