

A 2

数 学

(平成 26 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(1 枚目, 2 枚目は表裏の 2 箇所, 3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には, 問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後, 問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \cos(x^2) dx$ を求めよ。

(2) $0 < x < 1$ のとき、不等式

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} < x^x$$

が成り立つことを示せ。

2 r を $0 < r < 1$ をみたす定数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ で定める。ただし、実数 x に対して、
 $[x]$ は $\ell \leq x < \ell + 1$ をみたす整数 ℓ を表す。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{3n} (-1)^{k-1} r^{a_k}$$

を求めよ。

- (2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$n \text{ が奇数のとき } b_n = n$$

$$n \text{ が偶数のとき } b_n = 2n$$

で定める。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} r^{\frac{b_k}{n}}$$

を求めよ。

3 O を原点とする座標空間に、4 点

$$A(-2, 1, 3), B(s, 3, -1), C(1, 3, 4), D(t, 2t, 2t)$$

がある。ただし、 s, t は実数で $t \neq 0$ である。A を通り $\overrightarrow{OC}$ に平行な直線と、B を通り $\overrightarrow{OD}$ に平行な直線が点 P で交わるとする。次の問いに答えよ。

(1) s の値および P の座標を求めよ。

以下では $\triangle PAB \sim \triangle OCD$ を仮定する。

(2) t の値を求めよ。

(3) D から平面 PAB に下ろした垂線を DH とするとき、H の座標を求めよ。

4 平面上に半径1と半径2の同心円 C_1 と C_2 がある。自然数 n に対して、 C_2 の周を $3n$ 等分する $3n$ 個の点がある。この $3n$ 個の点の中から異なる3点を選ぶとき、次の(*)をみたす選び方の総数を a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) とする。

(*) 選んだ3点を頂点とする三角形の辺のうち、ちょうど k 個が C_1 の周と共有点をもつ。

次の問いに答えよ。

(1) $n = 2$ のとき、 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 a_0, a_1, a_2, a_3 を n の式で表せ。

5 xy 平面上に曲線 $C: y = x^2$ がある。 C 上の 2 点 P, Q が $PQ = 2$ をみたしながら動くとき、 PQ の中点の軌跡を D とする。 次の問いに答えよ。

(1) D の方程式を求めよ。

(2) C, D, y 軸および直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。