1

(1) $C: y=x^3-ax$（奇関数）

$D: y=(x-b)^3-a(x-b)$

ここで，

$$x^3-ax=(x-b)^3-a(x-b)$$

$$\iff 3x^2-3bx+b^2-a=0 \cdots\cdots ①$$

$$D=9b^2-12\left(b^2-a\right)$$

$$=12a-3b^2>0 \quad \left(4a>b^2 \quad \cdots\cdots ②\right)$$

②をみたすさいころの目は，

$(a, b)=(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1),$
$(3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2),$
$(4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3),$
$(5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3),$
$(6, 4)$ ／17 通り

求める確率(p_1)は，$p_1=\dfrac{17}{6\cdot 6}=\underline{\dfrac{17}{36}}$（答）

(2) 上記の 17 通りの(a, b)において①は異なる 2 実解$x=\alpha, \beta$をもつ.

$A\left(\alpha, \alpha^3-a\alpha\right), B\left(\beta, \beta^3-a\beta\right)$とすると，2 点 A，B を通る直線の傾きは，

$$m=\frac{\left(\beta^3-a\beta\right)-\left(\alpha^3-a\alpha\right)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta-\alpha)\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)-a(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2-a$$

$$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-a \qquad \left(\alpha+\beta=b,\ \alpha\beta=\frac{b^2-a}{3} \text{ より}\right)$$

$$=b^2-\frac{b^2-a}{3}-a$$

$$=\frac{2}{3}\left(b^2-a\right)$$

ここで，$m>0 \iff a<b^2 \cdots\cdots ③$

②，③を同時にみたすさいころの目は，

$(a, b)=(2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3),$
$(5, 3), (5, 4), (6, 3), (6, 4)$

／8 通り

求める確率(p_2)は，$p_2=\dfrac{8}{6\cdot 6}=\underline{\dfrac{2}{9}}$（答）

2

(1) $k=\int_0^1 f(t)dt$ (k:実数)とおくと，　　$f(x)=6x^2-k^2$ ……①

ここで，

$$k=\int_0^1 (6t^2-k^2)dt \quad (\text{①より})$$
$$=\left[2t^3-k^2t\right]_0^1$$
$$=2-k^2$$

つまり，

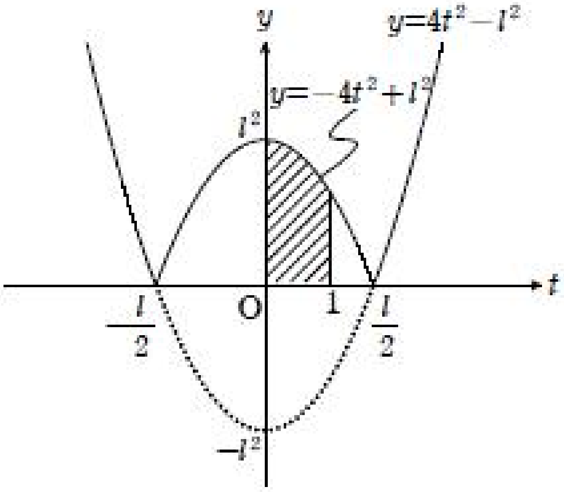
$$k^2+k-2=0 \iff (k+2)(k-1)=0 \qquad \therefore \underline{\underline{k=-2,1}}$$

$$\therefore \underline{f(x)=6x^2-4,\ f(x)=6x^2-1}\ (\text{答})$$

(2) $l=\int_0^1 |g(t)|dt$ (l:正の実数)とおくと，$g(x)=4x^2-l^2$ ……②

ここで，

$$l=\int_0^1 |4t^2-l^2|dt$$

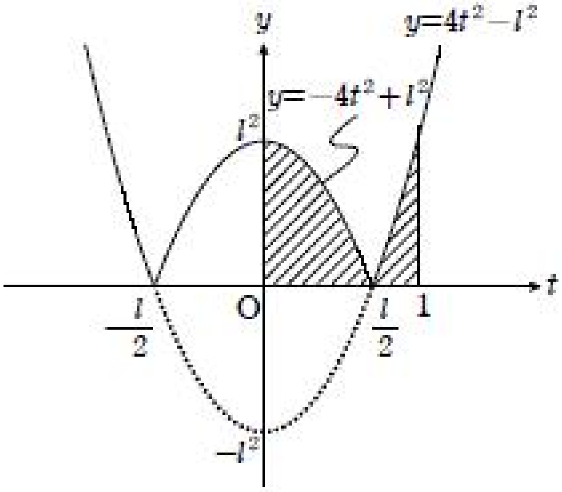


(i) $1\leqq\frac{l}{2}$ $(2\leqq l)$のとき

$$l=\int_0^1 (-4t^2+l^2)dt$$
$$=\left[-\frac{4}{3}t^3+l^2t\right]_0^1$$
$$=-\frac{4}{3}+l^2$$

つまり，$l^2-l-\frac{4}{3}=0 \quad \therefore l=\frac{3\pm\sqrt{57}}{6}$ ($l\geqq2$とならず不適)

(ii) $\frac{l}{2}\leqq1$ $(0<l\leqq2)$のとき



$$l=\frac{l^3}{3}+\int_{\frac{l}{2}}^1 (4t^2-l^2)dt$$
$$=\frac{l^3}{3}+\left[\frac{4}{3}t^3-l^2t\right]_{\frac{l}{2}}^1$$
$$=\frac{l^3}{3}+\left(\frac{4}{3}-l^2\right)-\left(\frac{l^3}{6}-\frac{l^3}{2}\right)$$

つまり，

$$2l^3-3l^2-3l+4=0$$

$$\iff (l-1)(2l^2-l-4)=0 \quad \therefore l=1,\ \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$$

ここで，$0<l\leqq2$ より，$l=1,\ \frac{1+\sqrt{33}}{4}$

$$\left(l^2=1,\ \frac{17+\sqrt{33}}{8}\right)$$

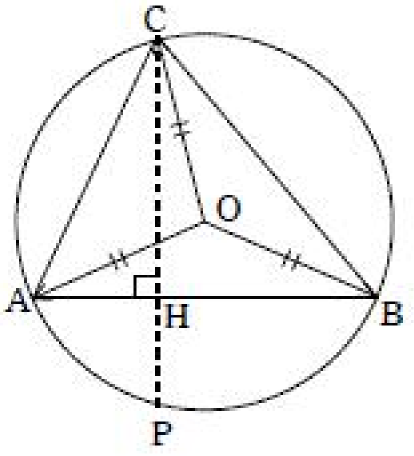
以上(i)，(ii)より，

$$\underline{g(x)=4x^2-1,\ g(x)=4x^2-\frac{17+\sqrt{33}}{8}}\ (\text{答})$$

3

(1) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$

$|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|-4\overrightarrow{OC}|$ より，



$$|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|^2=4^2$$

$$\iff 4+9+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=16$$

$$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\ (答)}$$

次に，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=1+1-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ (答)}$$

(2) $\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (t:実数)と表せる．

ここで，

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\frac{-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$=\left(\frac{3}{2}-t\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{3}{4}+t\right)\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left\{\left(\frac{3}{2}-t\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{3}{4}+t\right)\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=\left(t-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}+t\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-t-\frac{3}{4}-t\right)=0$$

$$\therefore\ t=\frac{3}{8} \qquad \therefore\ \overrightarrow{OH}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}=\frac{5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+5}$$

$$\therefore\ \underline{AH:HB=3:5\ (答)}$$

(3) (2)より， $\overrightarrow{CH}=\frac{9}{8}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ $\quad |\overrightarrow{CH}|^2=\frac{81}{64}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{64}\cdot\frac{5}{2}$ $\quad \therefore\ |\overrightarrow{CH}|=\frac{9\sqrt{10}}{16}$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CH}\ (k:実数)$$

$$=\frac{-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}}{4}+\frac{9}{8}k\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{8}k-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{9}{8}k-\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{OB}$$

ここで，

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\left(\frac{9}{8}k-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{8}k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{2}{4}\left(\frac{9}{8}k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{8}k-\frac{3}{4}\right)=1$$

$$\iff 9k\left(k-\frac{10}{9}\right)=0 \quad \therefore\ k=\frac{10}{9}\ (>1)$$

$$\therefore\ (四角形\ APBC\ の面積)=\frac{10}{9}\triangle ABC$$

$$=\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{9\sqrt{10}}{16}\right)$$

$$=\underline{\frac{5\sqrt{15}}{16}\ (答)}$$