

$$(1) \quad I = \int_0^{\log 3} \frac{dx}{e^x + 5e^{-x} - 2} \text{ とおく. } e^x = t \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \log 3 \\ \hline t & 1 \rightarrow 3 \end{array}$$

$$\therefore e^x dx = dt$$

$$I = \int_1^3 \frac{1}{t + \frac{5}{t} - 2} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{t^2 - 2t + 5} \cdot dt$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{(t-1)^2 + 4} dt$$

$$t-1 = 2 \tan \theta$$

$$\therefore dt = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \begin{array}{c|c} t & 1 \rightarrow 3 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad f(x) = \log x - \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)} \quad (x > 0) \text{ とおく.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(10x-4) \cdot (x^2+2x) - (5x^2-4x-1) \cdot (2x+2)}{x^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{7x^2 + x + 1}{x^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^3}{x^2(x+2)^2}$$

x	(0)	...	1	...	$(+\infty)$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f(x) \geq f(1) = 0$$

$$\text{よって, } \log x \geq \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)} \quad (x > 0) \text{ は示された. (証明終)}$$

(等号成立は $x=1$ のとき)

$$(1) \quad |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

$$|2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |-4\overrightarrow{OC}| \text{ より,}$$

$$|2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}|^2 = 4^2$$

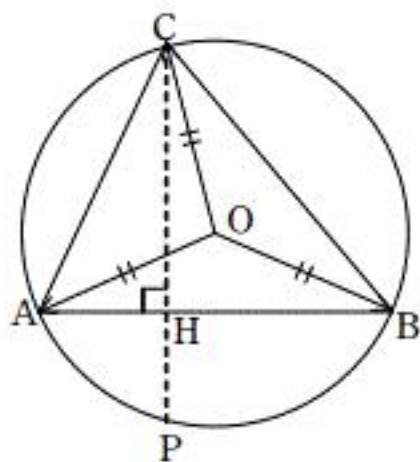
$$\Leftrightarrow 4 + 9 + 12\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{4} \text{ (答)}$$

次に,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = 1 + 1 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (答)}$$



$$(2) \quad \overrightarrow{OH} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (t: \text{実数}) \text{ と表せる.}$$

ここで,

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \frac{-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - t\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{3}{4} + t\right)\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\{ \left(\frac{3}{2} - t\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{3}{4} + t\right)\overrightarrow{OB} \right\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \left(t - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} + t\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - t - \frac{3}{4} - t\right) = 0$$

$$\therefore t = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \overrightarrow{OH} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5}$$

$$\therefore AH:HB = 3:5 \text{ (答)}$$

$$(3) \quad (2) \text{ より, } \overrightarrow{CH} = \frac{9}{8}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad |\overrightarrow{CH}|^2 = \frac{81}{64}\left(1+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{64} \cdot \frac{5}{2} \quad \therefore |\overrightarrow{CH}| = \frac{9\sqrt{10}}{16}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{CH} \quad (k: \text{実数})$$

$$= \frac{-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}}{4} + \frac{9}{8}k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \left(\frac{9}{8}k - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{9}{8}k - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{OB}$$

ここで,

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \left(\frac{9}{8}k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}k - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{2}{4}\left(\frac{9}{8}k - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{8}k - \frac{3}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 9k\left(k - \frac{10}{9}\right) = 0 \quad \therefore k = \frac{10}{9} \quad (>1)$$

$$\therefore (\text{四角形 APBC の面積}) = \frac{10}{9} \triangle ABC$$

$$= \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{10}}{16}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{15}}{16} \text{ (答)}$$

$$y = (x-a)^2 - 2a^2 + 1$$

$$\iff y = x^2 - 2xa + a^2 - 2a^2 + 1$$

$$\iff a^2 + 2xa + y - x^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

①が実解 a をもつから,

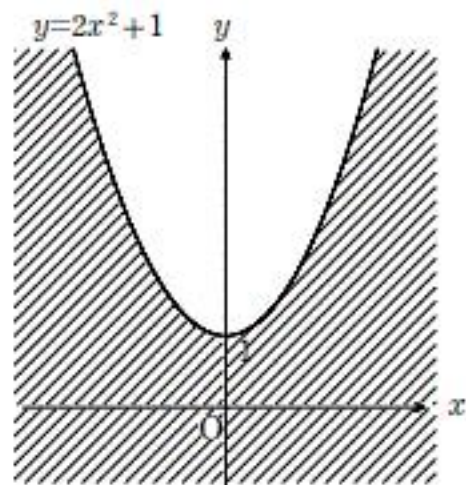
$$\frac{D}{4} = x^2 - (y - x^2 - 1)$$

$$= 2x^2 + 1 - y \geq 0$$

C の通過領域は,

$$y \leq 2x^2 + 1$$

(右図の斜線部分, ただし, 境界を含む)



(2)

$$f(a) = a^2 + 2xa + y - x^2 - 1$$

$$= (a+x)^2 - 2x^2 + y - 1 \quad \text{とする.}$$

①が, $-1 \leq a \leq 1$ に少なくとも 1 つは実数解をもつ条件を考える.

(i) $-1 \leq a \leq 1$ に 2 実解 (重解も含む) をもつとき

$$\begin{cases} y \leq 2x^2 + 1 \\ -1 \leq -x \leq 1 \\ f(-1) = y - x^2 - 2x \geq 0 \\ f(1) = y - x^2 + 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y \leq 2x^2 + 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ y \geq (1-x)^2 - 1 \\ y \geq (1+x)^2 - 1 \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

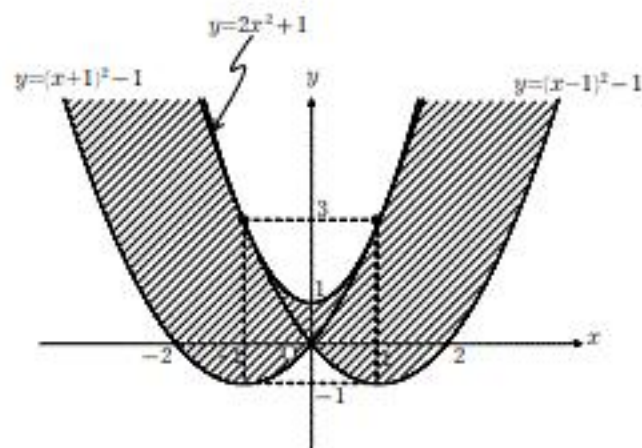
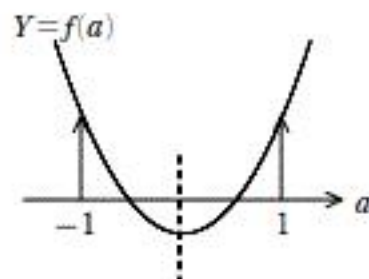
(ii) $-1 \leq a \leq 1$ に 1 実解をもつとき

$$f(-1) \cdot f(1) \leq 0$$

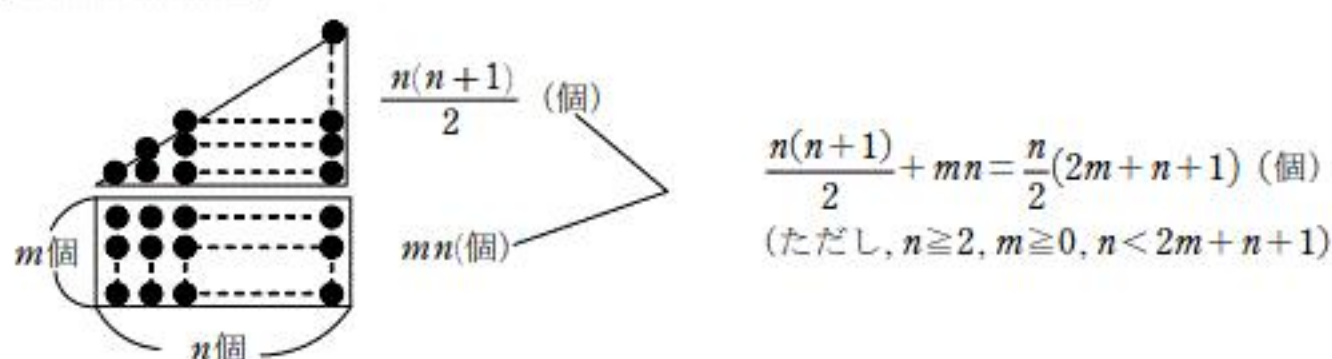
$$\therefore \begin{cases} y \geq (x-1)^2 - 1 \\ y \leq (x+1)^2 - 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq (x-1)^2 - 1 \\ y \geq (x+1)^2 - 1 \end{cases} \quad \dots\dots ③$$

以上(i)(ii)より, ②③を図示すると右図の通り.

C の通過領域は右図の斜線部分 (ただし, 境界を含む)



数の配列フォーム …… (※1)



$$(1) \quad \frac{n}{2}(2m+n+1) = 2020 \iff n(2m+n+1) = 4040$$

- $n=2$ $2m+3=2020$ (不適)
- $n=4$ $2m+5=1010$ (不適)
- $n=5$ $2m+6=808$ $\therefore m=401$
- $n=8$ $2m+9=505$ $\therefore m=248$
- $n=10$ $2m+11=404$ (不適)
- $n=20$ $2m+21=202$ (不適)
- $n=40$ $2m+41=101$ $\therefore m=30$

(以降 $n < 2m+n+1$ とならず不適)

これより,

- ・ (402, 403, 404, 405, 406)
- ・ (249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256)
- ・ (31, 32, 33, 34, …… , 70) (答)

$$(2) \quad 2^a = \frac{n}{2}(2m+n+1) \quad (a \geq 0, n \geq 2, m \geq 0 \text{ の整数}) \text{ で表せるとする.}$$

$$\iff 2^{a+1} = n(2m+n+1)$$

- $n=(\text{偶})$ のとき (右辺) $= (\text{偶}) \times \begin{matrix} \text{3以上の (奇)} \\ \downarrow \\ 2^l (l \geq 1) \text{では表せない} \end{matrix}$
- $n=(\text{奇})$ のとき (右辺) $= (\text{奇}) \times \begin{matrix} \text{3以上の (奇)} \\ \downarrow \\ 2^l (l \geq 1) \text{では表せない} \end{matrix}$

以上より, いずれも矛盾. よって, 2^a は 2 個以上の連続する自然数の和では表せない. (証明終)

(3) a, b は自然数で,

$$2^a(2b+1) = \frac{2^{a+1}}{2}(2b+1) \\ \left(= \frac{n}{2}(2m+n+1) \right)$$

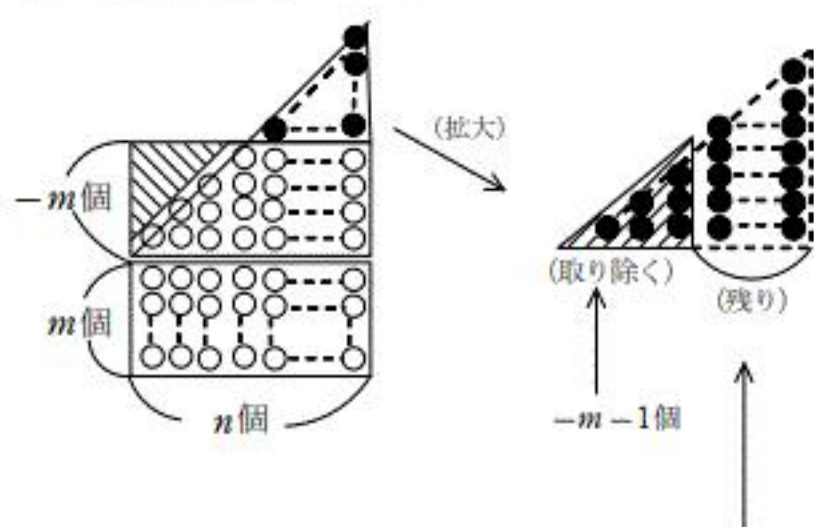
$$\text{と変形すると, } \begin{cases} 2^{a+1} = n \\ 2b+1 = 2m+n+1 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 2^{a+1} \\ m = b - 2^a \end{cases}$$

$$(i) \quad b \geq 2^a \text{ のとき } \begin{cases} n = 2^{a+1} \\ m = b - 2^a \end{cases} \text{ をみたす } m (\geq 0), n (\geq 2) \text{ が存在する}$$

(※1) で表せる

$$(ii) \quad b < 2^a \text{ のとき}$$

数の配列フォーム …… (※2)



$b < 2^a$ のときは
 $m = b - 2^a < 0$ のため
 (※2) のように $-m$ (個) だけ
 数を折り返して $-mn$ (個) 取り除く.

$$\begin{aligned} & 2^{a+1} - (2^a - b) - (-m - 1) \\ &= 2^a + b + b - 2^a + 1 \\ &= 2b + 1 \geq 3 \quad (\text{ここが 3 個以上の連続数となる}) \end{aligned}$$

以上 (i), (ii) より, a, b を自然数とすると, $2^a(2b+1)$ は 2 個以上の連続する自然数の和で表せる. (証明終)

$I = \int_0^{\pi} \cos ax \cdot \cos bx \cdot \cos cx \, dx$ とおくと,

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \{ \cos(a+b+c)x + \cos(a+b-c)x + \cos(a-b+c)x + \cos(a-b-c)x \} \, dx$$

ここで、0 以外の整数 m を用いて、 $\int_0^{\pi} \cos mx \, dx = \left[\frac{1}{m} \sin mx \right]_0^{\pi} = 0$

つまり、 $I > 0$ となるのは、 $a+b=c$ または $a+c=b$ または $b+c=a$

さいころの目の出方の種類 (○+◎=□タイプ)

$$\left. \begin{array}{l} (1, 1, 2) \cdots \cdots 3 \text{通り} \\ (1, 2, 3) \cdots \cdots 6 \text{通り} \\ (1, 3, 4) \cdots \cdots 6 \text{通り} \\ (2, 2, 4) \cdots \cdots 3 \text{通り} \\ (1, 4, 5) \cdots \cdots 6 \text{通り} \\ (2, 3, 5) \cdots \cdots 6 \text{通り} \\ (1, 5, 6) \cdots \cdots 6 \text{通り} \\ (2, 4, 6) \cdots \cdots 6 \text{通り} \\ (3, 3, 6) \cdots \cdots 3 \text{通り} \end{array} \right\} 45 \text{通り}$$

よって、求める確率(P)は、 $P = \frac{45}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{24}$ (答)