

数 学

(平成 27 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の 5 箇所(1 枚目は表裏の 2 箇所、2 枚目は表のみ)に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{e^x + 5e^{-x} - 2}$$

を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき、不等式

$$\log x \geq \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)}$$

が成り立つことを示せ。

2 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC があり、

$$2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

をみたしている。この円上に点 P があり、線分 AB と線分 CP は直交している。次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 線分 AB と線分 CP の交点を H とするとき、 $AH : HB$ を求めよ。
- (3) 四角形 $APBC$ の面積を求めよ。

3 実数 a に対し, xy 平面上の放物線 $C: y = (x - a)^2 - 2a^2 + 1$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) a がすべての実数を動くとき, C が通過する領域を求め, 図示せよ。

(2) a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき, C が通過する領域を求め, 図示せよ。

4 自然数を2個以上の連続する自然数の和で表すことを考える。たとえば、42は $3 + 4 + \cdots + 9$ のように2個以上の連続する自然数の和で表せる。次の問いに答えよ。

- (1) 2020 を2個以上の連続する自然数の和で表す表し方をすべて求めよ。
- (2) a を0以上の整数とすると、 2^a は2個以上の連続する自然数の和で表せないことを示せ。
- (3) a, b を自然数とすると、 $2^a(2b+1)$ は2個以上の連続する自然数の和で表せることを示せ。

5 1個のさいころを3回続けて投げ、出た目を順に a, b, c とする。不等式

$$\int_0^{\pi} (\cos ax) (\cos bx) (\cos cx) dx > 0$$

をみたす確率を求めよ。