

$$(1) a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_n^2 = \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \cdots ①$$

①で $n=1$ 代入

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{2}{3} a_1 a_2 \\ \Leftrightarrow 25 &= \frac{10}{3} a_2 \quad \swarrow a_1 = 5 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{15}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

①で $n=2$ 代入

$$\begin{aligned} 25 + \frac{225}{4} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2} a_3 \\ \Leftrightarrow 5a_3 &= \frac{325}{4} \\ \Leftrightarrow a_3 &= \frac{65}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) ①より,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_n^2 + a_{n+1}^2 &= \frac{2}{3} a_{n+1} a_{n+2} \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \\ -) a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_n^2 &= \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \\ \hline a_{n+1}^2 &= \frac{2}{3} a_{n+1} (a_{n+2} - a_n) \quad \swarrow (\text{①より } a_{n+1} > 0) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{2}{3} (a_{n+2} - a_n) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } \underline{a_{n+2} = \frac{3}{2} a_{n+1} + a_n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \quad (\text{答}) \quad \cdots \cdots ②$$

(3) ②より,

$$\begin{cases} a_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1} = 2 \left(a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \right) & \cdots \cdots ③ \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = -\frac{1}{2} (a_{n+1} - 2a_n) & \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

$$\text{③より, } a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n = 10 \cdot 2^{n-1} \quad \cdots \cdots ③'$$

$$\text{④より, } a_{n+1} - 2a_n = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \cdots \cdots ④'$$

$$\text{③', ④' より, } \underline{a_n = 2^{n+1} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \quad (\text{答})$$

2
(1)

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 1)x^2 - a^3 + a + b$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 2(a^2 + 1)x$$

$$= 2x(2x^2 + 3ax + a^2 + 1)$$

ここで、 $2x^2 + 3ax + a^2 + 1 = 0$ ①

①は $x=0$ を解にもたないの、「①が虚数解をもつ」 または 「①が重解をもつ」
(A) (B)

(i)(A)のとき

$$D = 9a^2 - 8(a^2 + 1)$$

$$= a^2 - 8$$

$$= (a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) < 0$$

ゆえに、 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

x	...	...	0	...	...
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			↘ 極小 ↗		

$$(\text{極小値}) = f(0) = -a^3 + a + b \geq 0$$

$$\text{よって、 } b \geq a^3 - a \quad (-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}) \quad \text{.....②}$$

(ii)(B)のとき

$$D = 0 \quad \text{ゆえに、 } a = \pm 2\sqrt{2}$$

x	...	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↘	極小	↗

x	...	0	...	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗		↗

$$a = \pm 2\sqrt{2} \text{ のいずれにせよ、 } (\text{極小値}) = f(0) = -a^3 + a + b \geq 0$$

$$\text{よって、 } b \geq a^3 - a \quad (a = \pm 2\sqrt{2}) \quad \text{.....③}$$

以上②, ③をまとめて $b \geq a^3 - a \quad (-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2})$ (答)

(2) $b \geq a^3 - a \quad (-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2})$ を図示する.

$b \geq a^3 - a$ とおくと、 $b' = 3a^2 - 1$					
a	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...
b'	+	0	-	0	+
b	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

ここで、 $a - 2b = k$ とおく.

$$b = \frac{1}{2}a - \frac{k}{2}$$

(i) $(a, b) = (-2\sqrt{2}, -14\sqrt{2})$ を通るとき

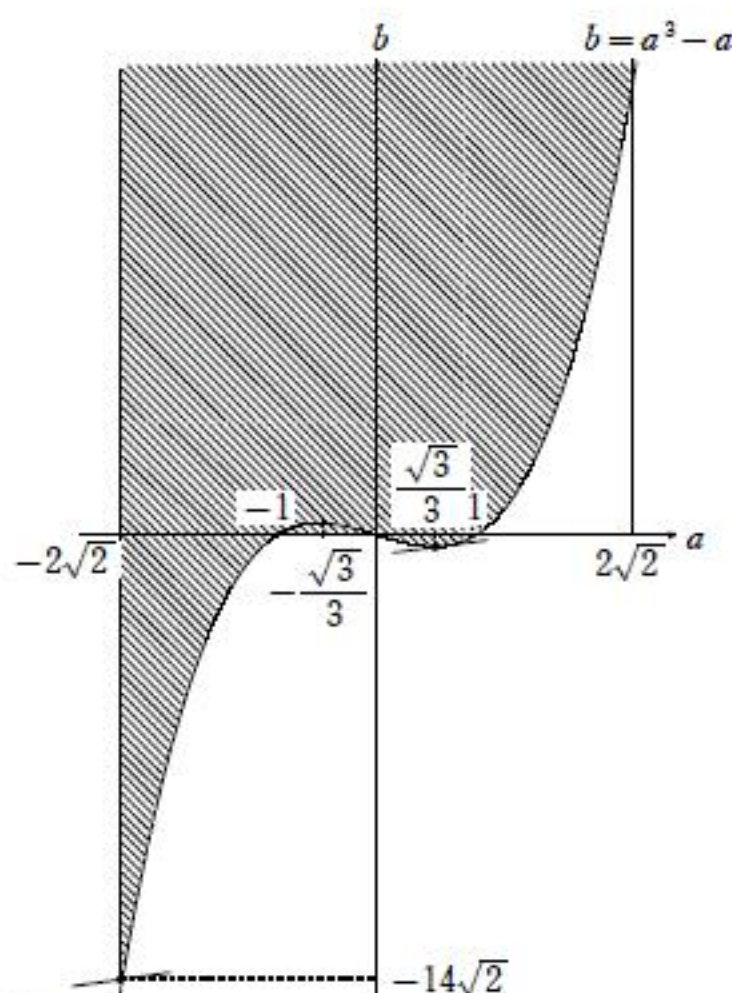
$$k = -2\sqrt{2} + 28\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$$

(ii) $b = a^3 - a \quad (0 < a < 1)$ と $b = \frac{1}{2}a - \frac{k}{2}$ が接するとき

$$3a^2 - 1 = \frac{1}{2} \iff a^2 = \frac{1}{2} \text{ より、接点 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ を } b = \frac{1}{2}a - \frac{k}{2} \text{ が通るから、}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{k}{2} \quad \text{ゆえに、 } k = \sqrt{2}$$

以上(i)(ii)より、 $(a - 2b \text{ の最大値}) = 26\sqrt{2}$ (答)



$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \text{より,}$$

$$\overrightarrow{OP} = 6\overrightarrow{OG} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

ここで,

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP} \quad (k: \text{変数})$$

$$= 2k\vec{a} + 2k\vec{b} + 2k\vec{c}$$

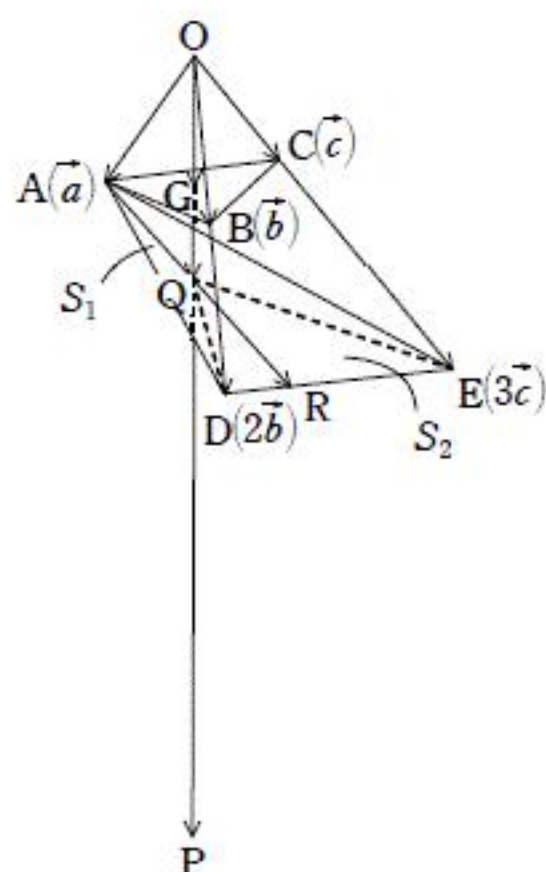
$$= 2k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{OE}$$

と表わせて、点 Q は平面 ADE 上にあるから、

$$2k + k + \frac{2k}{3} = 1 \quad \text{すなわち,} \quad k = \frac{3}{11}$$

ゆえに、

$$\underline{\overrightarrow{OQ} = \frac{6}{11}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})} \quad (\text{答})$$



$$(2)(1) \text{より,} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{6}{11}\vec{b} + \frac{6}{11}\vec{c} - \frac{5}{11}\vec{a}$$

ここで、 $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = 3\vec{c} - \vec{a}$ より

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{11}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AE} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}}{2+3}$$

$$= \frac{5}{11}\overrightarrow{AR}$$

(右上図のように 2 直線 AQ と DE の交点を R とする)

したがって、 $S_1 : S_2 = 11 : 6$

$$\text{ゆえに,} \quad \underline{\frac{S_2}{S_1} = \frac{6}{11}} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{6 \cdot 8}{11 \cdot 3} \\ &= \underline{\underline{\frac{16}{11}}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

