

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\log(1-x)}{x} \quad (0 < x < 1) \\
 f'(x) &= \frac{\frac{-1}{1-x} \cdot x - \log(1-x) \cdot 1}{x^2} \\
 &= \frac{-\frac{x}{1-x} - \log(1-x)}{x^2} \\
 &= \frac{1}{x^2(1-x)} \{x + (1-x)\log(1-x)\} \\
 &\quad \text{①}
 \end{aligned}$$

①の符号を調べればよい.

$$g(x) = x + (1-x)\log(1-x) \quad (0 \leq x < 1) \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 1 - \log(1-x) + (1-x) \cdot \frac{-1}{1-x} \\
 &= -\log(1-x) > 0
 \end{aligned}$$

$$y = g(x) \text{ は } 0 < x < 1 \text{ で } x \text{ の単調増加.} \quad g(x) > g(0) = 0$$

((①) > 0)

これより $f'(x) < 0$ となり, $f(x) = \frac{\log(1-x)}{x}$ は $0 < x < 1$ で減少することが示された.

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan\left(\frac{(n+k)\pi}{6n}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)} \\
 &= \int_0^1 \frac{dx}{\tan\left(\frac{\pi}{6}(1+x)\right)} \quad \left(\text{区分別求積法} \right)
 \end{aligned}$$

ここで, $\frac{\pi}{6}(1+x) = u$ ゆえに $\frac{\pi}{6}dx = du$

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan u} \cdot \frac{6}{\pi} du = \frac{6}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{6}{\pi} [\log(\sin u)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{3}{\pi} \log 3 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow 1$
u	$\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$(1) a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ①$$

①で $n=1$ 代入

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{2}{3} a_1 a_2 \\ \Leftrightarrow 25 &= \frac{10}{3} a_2 \quad \curvearrowright a_1 = 5 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{15}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

①で $n=2$ 代入

$$\begin{aligned} 25 + \frac{225}{4} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2} a_3 \\ \Leftrightarrow 5a_3 &= \frac{325}{4} \\ \Leftrightarrow a_3 &= \frac{65}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) ①より,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 &= \frac{2}{3} a_{n+1} a_{n+2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ -) a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 &= \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \hline a_{n+1}^2 &= \frac{2}{3} a_{n+1} (a_{n+2} - a_n) \quad \curvearrowright (\text{①より } a_{n+1} > 0) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{2}{3} (a_{n+2} - a_n) \\ \text{ゆえに, } a_{n+2} &= \frac{3}{2} a_{n+1} + a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{答}) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

(3) ②より,

$$\begin{cases} a_{n+2} + \frac{1}{2} a_{n+1} = 2 \left(a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \right) & \dots\dots ③ \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = -\frac{1}{2} (a_{n+1} - 2a_n) & \dots\dots ④ \end{cases}$$

$$\text{③より, } a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n = 10 \cdot 2^{n-1} \quad \dots\dots ③'$$

$$\text{④より, } a_{n+1} - 2a_n = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \dots\dots ④'$$

$$\text{③', ④' より, } a_n = 2^{n+1} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{答})$$

$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \quad \text{より,}$$

$$\overrightarrow{OP} = 6\overrightarrow{OG} = 2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

ここで,

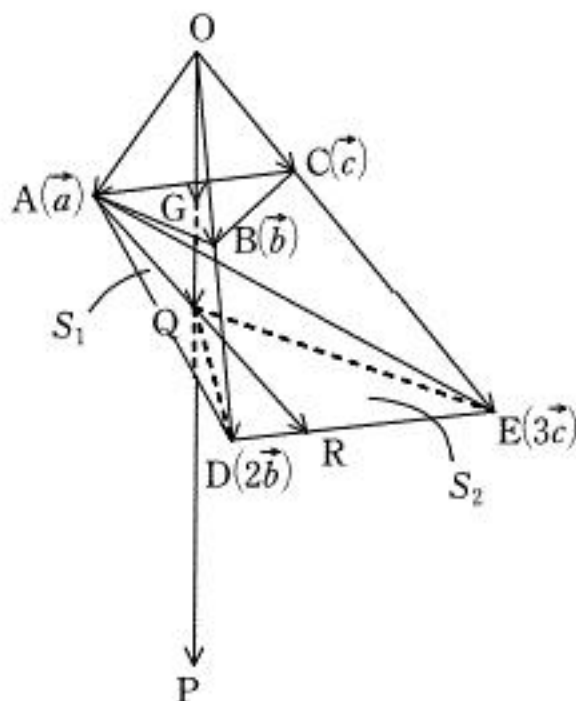
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= k\overrightarrow{OP} \quad (k: \text{変数}) \\ &= 2k\overrightarrow{a} + 2k\overrightarrow{b} + 2k\overrightarrow{c} \\ &= 2k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{OE} \end{aligned}$$

と表わせて、点 Q は平面 ADE 上にあるから、

$$2k + k + \frac{2k}{3} = 1 \quad \text{すなわち,} \quad k = \frac{3}{11}$$

ゆえに、

$$\underline{\overrightarrow{OQ} = \frac{6}{11}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})} \quad (\text{答})$$



$$(2) (1) \text{より,} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{6}{11}\overrightarrow{b} + \frac{6}{11}\overrightarrow{c} - \frac{5}{11}\overrightarrow{a}$$

ここで、 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \frac{3}{11}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AE} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}}{2+3} \\ &= \frac{5}{11}\overrightarrow{AR} \end{aligned}$$

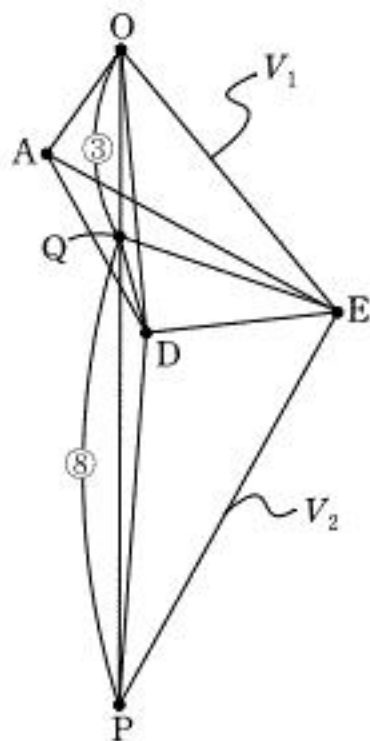
(右上図のように 2 直線 AQ と DE の交点を R とする)

したがって、 $S_1 : S_2 = 11 : 6$

$$\text{ゆえに,} \quad \underline{\frac{S_2}{S_1} = \frac{6}{11}} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{6 \cdot 8}{11 \cdot 3} \\ &= \frac{16}{11} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



$C_1: y = x \log x (x > 0)$ 上の点 $(t, t \log t)$ での接線は,

$$y' = \log x + 1 \text{ より, } y = (\log t + 1)(x - t) + t \log t$$

$$\iff y = (\log t + 1)x - t \quad (\text{ただし, } t > 0)$$

ここで,

$$ax^2 = (\log t + 1)x - t$$

$$\iff ax^2 - (\log t + 1)x + t = 0 \quad (t > 0) \quad \dots\dots ①$$

①が重解 x をもてばよいので,

$$D = (\log t + 1)^2 - 4at = 0 \iff a = \frac{(\log t + 1)^2}{4t} \quad \dots\dots ②$$

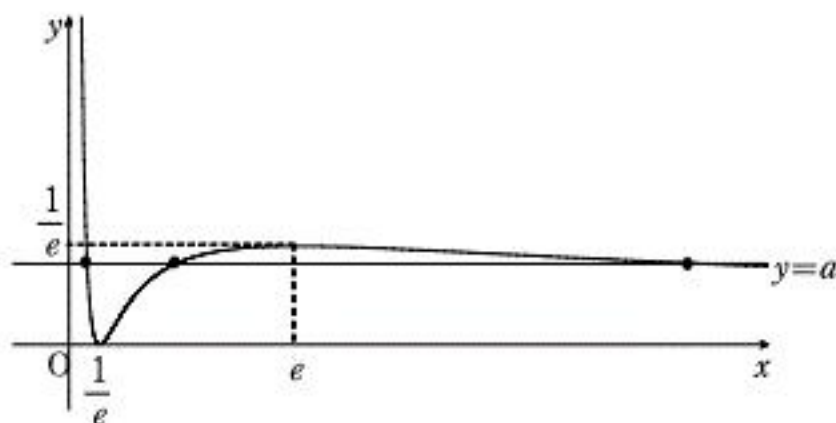
②をみたす正の実数解 t の数が共通接線の本数である.

2関数 $\begin{cases} y = a \quad (> 0) \\ g(x) = \frac{(\log x + 1)^2}{4x} \quad (x > 0) \end{cases}$ に分離して調べる.

$$g'(x) = \frac{2(\log x + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x + 1)^2 \cdot 1}{4x^2}$$

$$= \frac{(\log x + 1)(1 - \log x)}{4x^2}$$

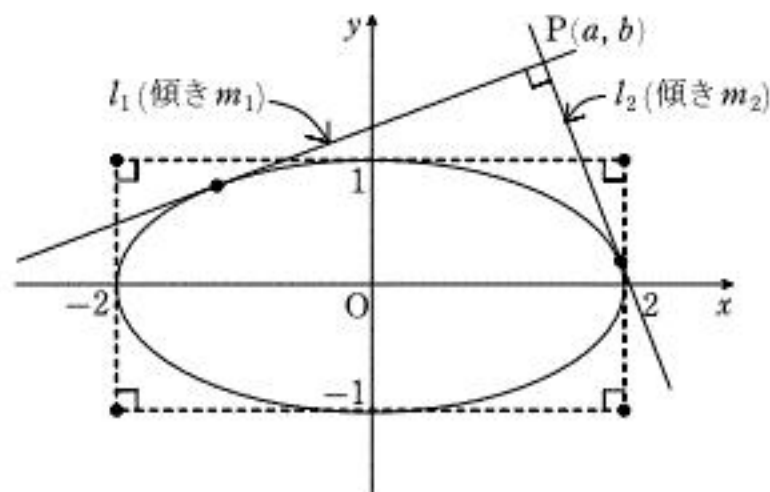
t	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...	e	...	$(+\infty)$
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	$(+\infty)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)



(共通接線の本数) $\begin{cases} 3 \text{ (本)} \dots\dots \left(0 < a < \frac{1}{e} \right) \\ 2 \text{ (本)} \dots\dots \left(a = \frac{1}{e} \right) \\ 1 \text{ (本)} \dots\dots \left(a > \frac{1}{e} \right) \end{cases} \quad (\text{答})$

(1) (i) $a = \pm 2$ のとき

右図の4点 $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, -1)$ が題意をみたす。



(ii) $a \neq \pm 2$ のとき

点 $P(a, b)$ を通り、傾き m ($\neq 0$)の直線は、

$$y = m(x - a) + b$$

これと $x^2 + 4y^2 = 4$ を連立して、

$$x^2 + 4\{m(x - a) + b\}^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (4m^2 + 1)x^2 + 8m(b - ma)x + 4m^2a^2 - 8mab + 4b^2 - 4 = 0 \quad \dots\dots ①$$

①が重解をもつから、

$$D/4 = 16m^2(b - ma)^2 - (4m^2 + 1)(4m^2a^2 - 8mab + 4b^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4 - a^2)}_0 m^2 + 2abm + 1 - b^2 = 0 \quad \dots\dots ②$$

$\frac{a^2}{4} + b^2 > 1 \quad \dots\dots ③$ のもとで、②は異なる2実数解をもつので、 $m = m_1, m_2$ とおく。

解と係数の関係により、 $m_1 \times m_2 = \frac{1 - b^2}{4 - a^2} = -1 \quad \leftarrow (l_1 \perp l_2)$

ゆえに、 $a^2 + b^2 = 5 \quad \dots\dots ④$

(ii)の④は(i)の4点と③をすべてみたす。

求める条件は、 $a^2 + b^2 = 5$ (答)

(2) 4つの頂点は $(1, 2)$, (A), $(-1, -2)$, (B)

○ $y = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}x + \frac{8 - \sqrt{13}}{3}$ と $x^2 + y^2 = 5$ を連立

$$x^2 + \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3}x + \frac{8 - \sqrt{13}}{3} \right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{13}x + 8)((\sqrt{13} - 2)x + 2 - \sqrt{13}) = 0$$

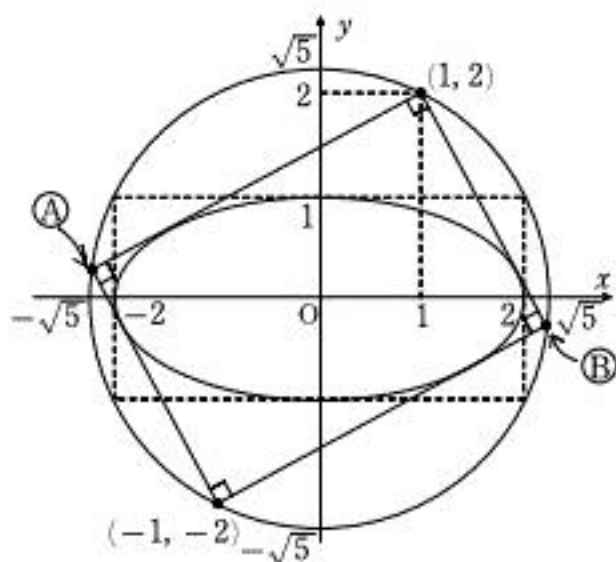
よって、 $x = -\frac{8\sqrt{13}}{13}, 1 \quad \leftarrow (\text{Aの} x \text{成分})$

○ $y = -\frac{2 + \sqrt{13}}{3}x + \frac{8 + \sqrt{13}}{3}$ と $x^2 + y^2 = 5$ を連立

$$x^2 + \left(-\frac{2 + \sqrt{13}}{3}x + \frac{8 + \sqrt{13}}{3} \right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{13}x - 8)((\sqrt{13} + 2)x - 2 - \sqrt{13}) = 0$$

よって、 $x = 1, \frac{8\sqrt{13}}{13} \quad \leftarrow (\text{Bの} x \text{成分})$



$$\begin{aligned} (\text{長方形の面積}) &= \left(1 + \frac{8\sqrt{13}}{13} \right) \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \right)^2} \cdot \left(\frac{8\sqrt{13}}{13} - 1 \right) \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3} \right)^2} \\ &= \frac{13 + 8\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{8\sqrt{13} - 13}{13} \cdot \sqrt{\frac{26 - 4\sqrt{13}}{9}} \cdot \sqrt{\frac{26 + 4\sqrt{13}}{9}} \\ &= \frac{663}{169} \cdot \sqrt{\frac{676 - 208}{9}} \\ &= \frac{34\sqrt{13}}{13} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$