

1 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 5, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) a_{n+2} を a_n, a_{n+1} を用いて表せ。
- (3) 一般項 a_n を求めよ。

2 実数 a, b に対し、関数

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 1)x^2 - a^3 + a + b$$

がただ 1 つの極値をもち、その極値が 0 以上になるとする。次の問いに答えよ。

(1) a, b のみたす条件を求めよ。

(2) a, b が (1) の条件をみたすとき、 $a - 2b$ の最大値を求めよ。

3 四面体 OABC があり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。三角形 ABC の重心を G とする。点 D, E, P を $\overrightarrow{OD} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = 3\vec{c}$, $\overrightarrow{OP} = 6\overrightarrow{OG}$ をみたす点とし、平面 ADE と直線 OP の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 三角形 ADE の面積を S_1 , 三角形 QDE の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) 四面体 OADE の体積を V_1 , 四面体 PQDE の体積を V_2 とするとき、 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。