

数 学

(平成 28 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 6—1 から A 6—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(A 6—1, A 6—2 は表裏の 2 箇所, A 6—3 は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 6—1 から A 6—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \frac{\log(1-x)}{x}$ は $0 < x < 1$ の範囲で減少することを示せ。

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan\left(\frac{(n+k)\pi}{6n}\right)}$$

を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 5, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) a_{n+2} を a_n, a_{n+1} を用いて表せ。
- (3) 一般項 a_n を求めよ。

3 四面体 OABC があり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。三角形 ABC の重心を G とする。点 D, E, P を $\overrightarrow{OD} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = 3\vec{c}$, $\overrightarrow{OP} = 6\overrightarrow{OG}$ をみたす点とし、平面 ADE と直線 OP の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 三角形 ADE の面積を S_1 , 三角形 QDE の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) 四面体 OADE の体積を V_1 , 四面体 PQDE の体積を V_2 とするとき、 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

- 4 a を正の定数とする。2つの曲線 $C_1: y = x \log x$ と $C_2: y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

5 xy 平面上に楕円 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 点 $P(a, b)$ を通る C の接線が 2 本あり、それらが直交するとき、 a, b が満たす条件を求めよ。

(2) C に外接する長方形のうち、 x 座標が 1 で y 座標が正である頂点をもつものの面積を求めよ。

