1

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\sin x-\cos x\\
&=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\\
&=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$x-\dfrac{\pi}{4}$ はすべての実数を動くので，

$$
\begin{aligned}
&-1\leqq \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &-\sqrt{2}\leqq \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \underline{-\sqrt{2}\leqq f(x)\leqq\sqrt{2}}$ 　(答)

(2)　(1)より，　$t=\sin x-\cos x\ \left(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
t^2&=(\sin x-\cos x)^2\\
&=1-2\sin x\cos x\qquad \left(\underline{\underline{\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}}}\right)
\end{aligned}
$$

次に，

$$
\begin{aligned}
\sin^3 x-\cos^3 x&=(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)\\
&=t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)\\
&=-\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t
\end{aligned}
$$

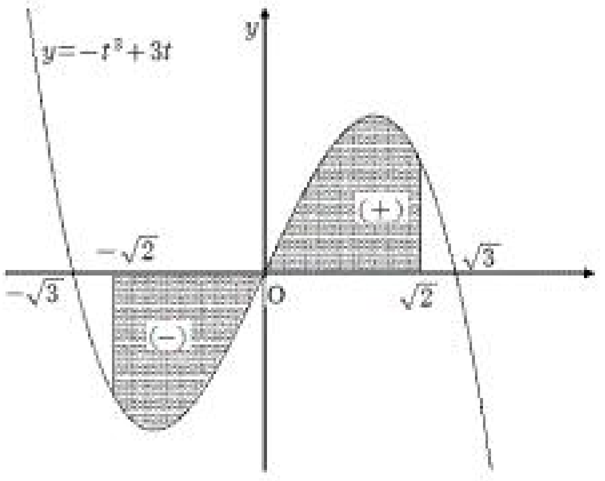
よって，

$$
\begin{aligned}
g(x)=G(t)&=2\left|-\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t\right|+\frac{1-t^2}{2}+t\\
&=\left|-t^3+3t\right|-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}\qquad\left(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
y&=-t^3+3t\\
&=-t\left(t+\sqrt{3}\right)\left(t-\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

のグラフは右図の通り．



(i)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
G(t)&=t^3-3t-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}\\
&=t^3-\frac{t^2}{2}-2t+\frac{1}{2}\\
G'(t)&=3t^3-t-2\\
&=(3t+2)(t-1)
\end{aligned}
$$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0
$G'(t)$		$+$	0	$-$	
$G(t)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{71}{54}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\leqq G(t)\leqq\dfrac{71}{54}$ ……①

(ii)　$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$ のとき

$$
\begin{aligned}
G(t)&=-t^3+3t-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}\\
&=-t^3-\frac{t^2}{2}+4t+\frac{1}{2}\\
G'(t)&=-3t^3-t+4\\
&=-(3t+4)(t-1)
\end{aligned}
$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$G'(t)$		$+$	0	$-$	
$G(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\leqq G(t)\leqq 3$ ……②

以上①，②より，

$$
-\frac{1}{2}\leqq G(t)\leqq 3
$$

$\therefore\ \underline{-\dfrac{1}{2}\leqq g(x)\leqq 3}$ 　(答)

2

$$a^2x^3+abx^2-b^2x-5=0 \qquad (a:\text{自然数}, b:\text{整数})$$

$$x=\underbrace{\alpha\,(\text{整数}),\ \beta,\ \gamma}_{(\text{異なる3つの実数解})} \qquad (\text{ただし}, \beta\cdot\gamma=(\text{整数}))$$

解と係数の関係により，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=-\dfrac{b^2}{a^2}\\ \alpha\beta\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\dfrac{5}{a^2}\end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

$\alpha(\beta\gamma)=(\text{整数})\cdot(\text{整数})=\dfrac{5}{a^2}$ より，

$$a^2=1,\ \cancel{5} \qquad \therefore\ \underline{\underline{a=1\ (\text{自然数})}}$$

これより，

$$\begin{cases}\alpha+(\beta+\gamma)=-b\\ \alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=-b^2\\ \alpha(\beta\gamma)=5\end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\therefore\ (\alpha, \beta\gamma)=(1, 5)(5, 1)(-1, -5)(-5, -1) \leftarrow (\text{絞り込み})$$

◦ $(\alpha, \beta\gamma)=(1, 5)$ のとき

$$② \iff \begin{cases}1+(\beta+\gamma)=-b\\ (\beta+\gamma)+5=-b^2\end{cases} \quad \text{よって，} \quad b^2-b+4=0 \qquad (\text{不適})$$

◦ $(\alpha, \beta\gamma)=(5, 1)$ のとき

$$② \iff \begin{cases}5+(\beta+\gamma)=-b\\ 5(\beta+\gamma)+1=-b^2\end{cases} \quad \text{よって，} \quad \begin{aligned}&b^2-5b-24=0\\ \iff\ &(b-8)(b+3)=0 \qquad \therefore\ b=8, -3\end{aligned}$$

(i) $b=8 \rightarrow \beta+\gamma=-13, \beta\gamma=1$

$\therefore\ x^2+13x+1=0 \quad D=13^2-4>0$ $\underline{\underline{(\text{適})}}$

(ii) $b=-3 \rightarrow \beta+\gamma=-2, \beta\gamma=1$

$\therefore\ x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \quad x=\beta=\gamma\,(\text{重解}) \quad (\text{不適})$

◦ $(\alpha, \beta\gamma)=(-1, -5)$ のとき

$$② \iff \begin{cases}-1+(\beta+\gamma)=-b\\ -1(\beta+\gamma)-5=-b^2\end{cases} \quad \text{よって，} \quad \begin{aligned}&b^2+b-6=0\\ \iff\ &(b+3)(b-2)=0 \qquad \therefore\ b=-3, 2\end{aligned}$$

(iii) $b=-3 \rightarrow \beta+\gamma=4, \beta\gamma=-5$

$\therefore\ x^2-4x-5=0 \iff (x+1)(x-5)=0\ \therefore\ x=-1, 5 \quad (\text{不適})$

$(\beta \text{と} \gamma)$

(iv) $b=2 \rightarrow \beta+\gamma=-1, \beta\gamma=-5$

$\therefore\ x^2+x-5=0 \quad D=1^2+4\cdot5>20$ $\underline{\underline{(\text{適})}}$

◦ $(\alpha, \beta\gamma)=(-5, -1)$ のとき

$$② \iff \begin{cases}-5+(\beta+\gamma)=-b\\ -5(\beta+\gamma)+1=-b^2\end{cases} \quad \text{よって，} \quad b^2+5b-26=0 \quad (\text{不適})$$

以上より，

$$\underline{\underline{(a, b)=(1, 8), (1, 2) \qquad (\text{答})}}$$

3

(1) $P(A=0)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^4=\underline{\dfrac{625}{1296}}$ (答) ←（A が 0 点となる確率を $P(A=0)$ と表す）

(2)

$1\to⑤\to\{1,2,3,4,5\}$ 　 $5\cdot5=25$ 通り

（2回の和が6でなければならない）

$1\to6\to⑤$

$2\to5\to⑤$ 　 $5\cdot5=25$ 通り

$3\to4\to⑤$

$4\to3\to⑤$

$5\to2\to⑤$

$1\to1\to5\to⑤$ 　 1 通り

$1\to2\to4\to⑤$ 　 4 通り

$1\to3\to3\to⑤$ 　 2 通り

$2\to2\to3\to⑤$ 　 3 通り

$1\to6\to6\to⑤$ 　 1 通り

$2\to5\to6\to⑤$ 　 4 通り

$3\to4\to6\to⑤$ 　 4 通り

$3\to5\to5\to⑤$ 　 3 通り

$4\to4\to5\to⑤$ 　 3 通り

25 通り

$1\to④\to5\to①$

$3\to③\to4\to②$

$4\to②\to3\to③$

$5\to①\to2\to④$

4 通り

$25+25+25+4=79$ 通り

$\therefore\ P(A=5)=\dfrac{79}{6^4}$

$=\underline{\dfrac{79}{1296}}$ (答)

(3) $A=5$ かつ $E=3$ となるのは，$1\to\overset{(E)}{\boxed{3}}\to3\to\overset{(A)}{⑤}$, $1\to\overset{(A)}{⑤}\to1\to\overset{(E)}{\boxed{3}}$ の 2 通り

よって，$P(A=5\cap E=3)=\dfrac{2}{6^4}=\dfrac{2}{1296}$

$\therefore\ P_{A=5}(E=3)=\dfrac{P(A=5\cap E=3)}{P(A=5)}=\dfrac{\frac{2}{1296}}{\frac{79}{1296}}=\underline{\dfrac{2}{79}}$ (答)