

1.

$$(1) \quad f(x) = (3-x)e^x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x + (3-x)e^x \\ &= (2-x)e^x \end{aligned}$$

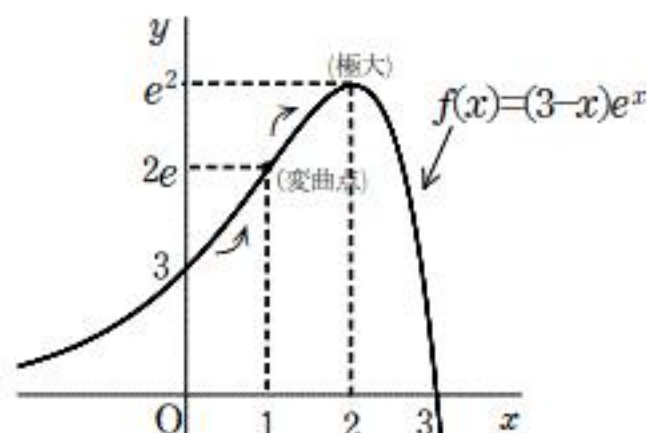
$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^x + (2-x)e^x \\ &= (1-x)e^x \end{aligned}$$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		+	+	+	0	-	-	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	-	-	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$(1, 2e)$	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	0	$\searrow$	$(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{変曲点}(1, 2e), \quad (\text{極大値}) = f(2) = e^2$$

グラフを描くと右図の通り



(2)

$$3\sin x + 4\cos x = 5 \left(\sin x \cdot \frac{3}{5} + \cos x \cdot \frac{4}{5} \right)$$

$$= 5\sin(x+\alpha) \quad \left(\text{ただし, } \cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5\sin(x+\alpha)}$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{1}{5} \cdot \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \frac{1}{5} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt$$

$$= \frac{1}{10} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \left(\frac{\sin t}{1 + \cos t} + \frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{10} \left[\log \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}$$

$$= \frac{1}{10} \left(\log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \log \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)$$

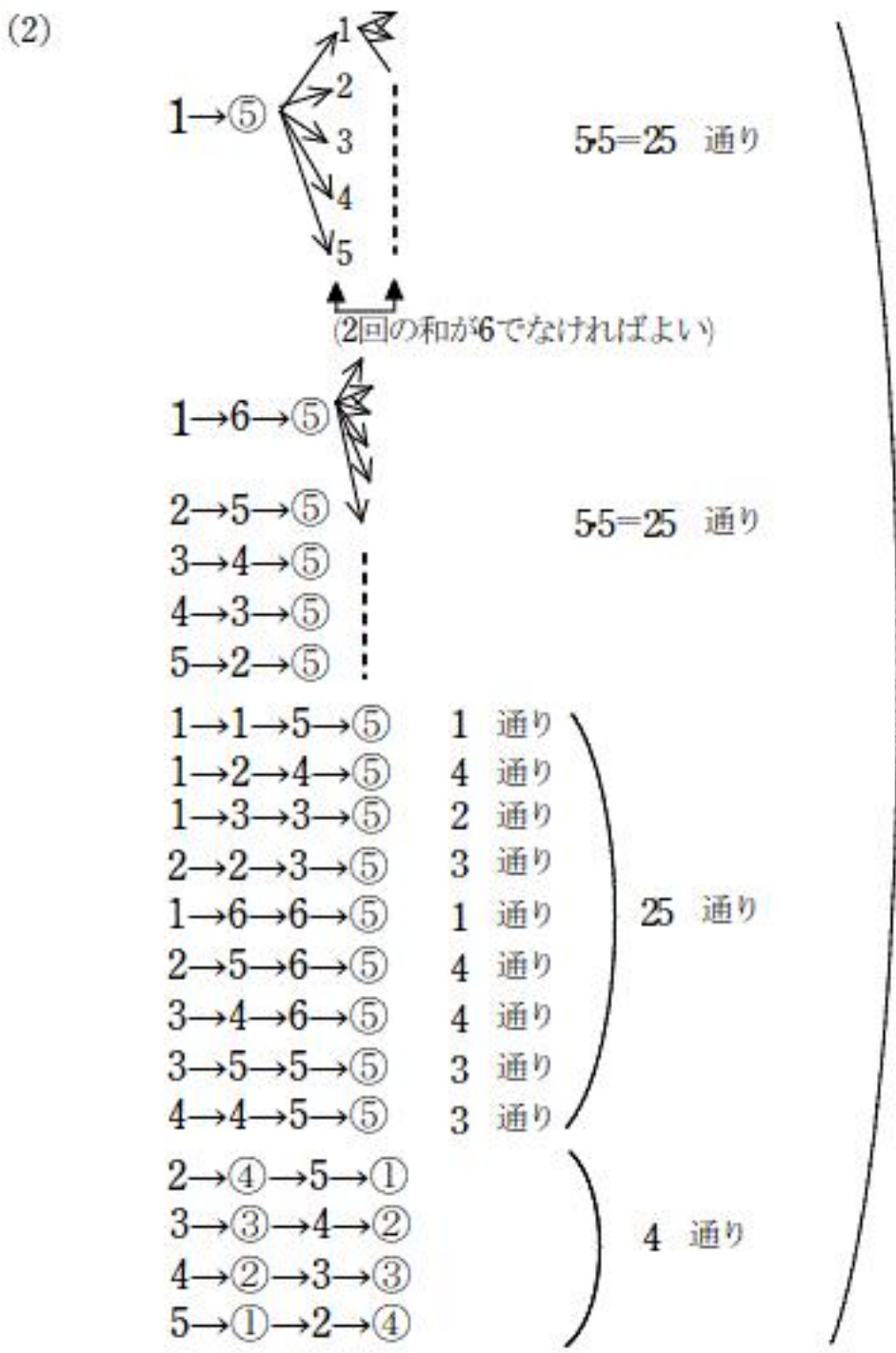
$$= \frac{1}{5} \log 6 \quad (\text{答})$$

$$\left. \begin{array}{l} t = x + \alpha \\ \therefore dt = dx \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha \end{array}$$

2.

(1) $P(A=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}$ (答) ← (A が 0 点となる確率を $P(A=0)$ と表す)



(3) $A=5$ かつ $E=3$ となるのは, $1 \rightarrow \overset{(E)}{\boxed{3}} \rightarrow 3 \rightarrow \overset{(A)}{\boxed{5}}, 1 \rightarrow \overset{(A)}{\boxed{5}} \rightarrow 1 \rightarrow \overset{(E)}{\boxed{3}}$ の 2 通り

よって, $P(A=5 \cap E=3)=\frac{2}{6^4}=\frac{2}{1296}$

$\therefore P_{A=5}(E=3)=\frac{P(A=5 \cap E=3)}{P(A=5)}=\frac{\frac{2}{1296}}{\frac{79}{1296}}=\frac{2}{79}$ (答)

3. O を原点, $A(2, 0, 0)$ とする座標空間を用いて考える.

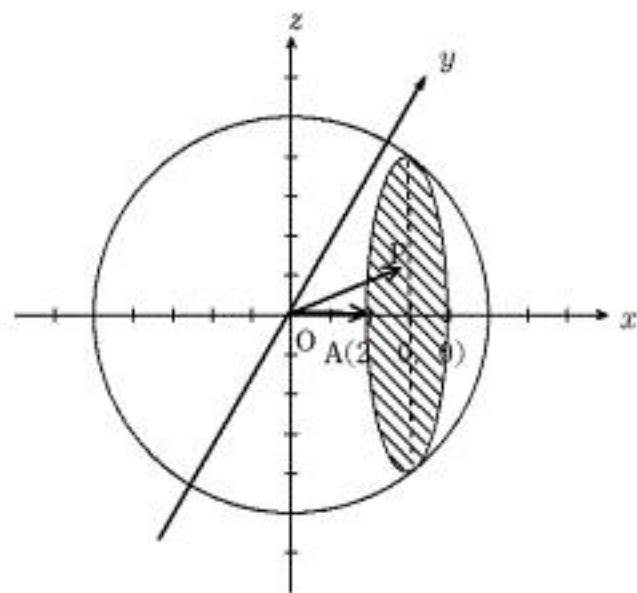
(1)

$$|\overrightarrow{OP}| \leq 5 \quad \cdots \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot 2 \cos \theta = 6 & \left(\overrightarrow{OP} \text{ と } \overrightarrow{OA} \text{ のなす角を } \theta \right) \\ \iff |\overrightarrow{OP}| \cdot \cos \theta &= 3 \quad \cdots \cdots ② & \left(0 \leq \theta \leq \pi \right) \end{aligned}$$

①, ②より点 P は原点 O を中心, 半径 5 の球と平面 $x=3$ の交わりの円周および内部に存在(右上図の斜線部分)

$$\therefore \underline{(|\overrightarrow{OP}| \text{ の最小値}) = 3} \quad (P(3, 0, 0) \text{ のとき}) \quad (\text{答})$$



(2) (1)と同様に考えると

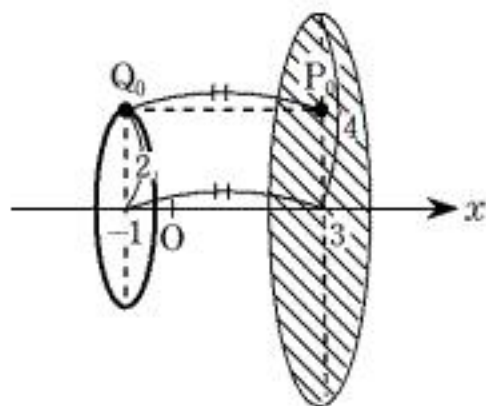
$$\begin{cases} |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = -2 \end{cases}$$

より, $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OA}$ のなす角を φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とすると,
点 Q は原点 O を中心, 半径 $\sqrt{5}$ の球面上で

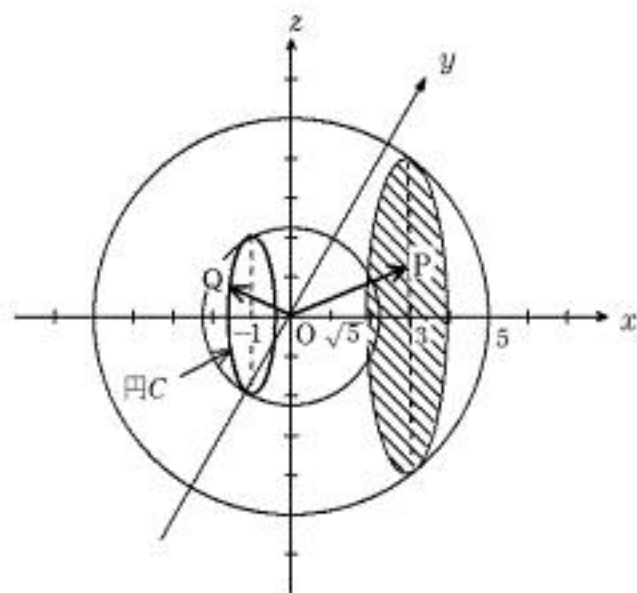
$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ をみたす円周上に存在(右図の円 C)

(平面 $x=-1$)

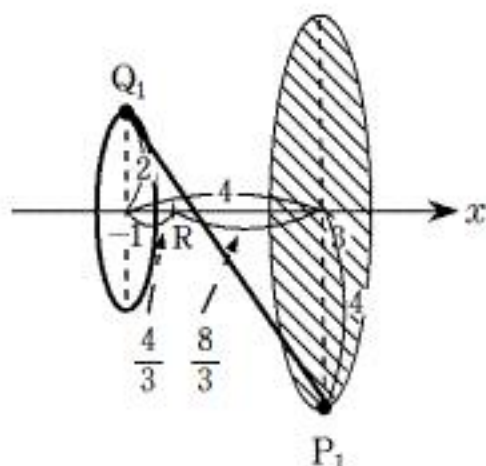
・ $|\overrightarrow{PQ}|$ の最小のとき (zx 平面で考える)



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &\geq |\overrightarrow{P_0Q_0}| = 4 \\ &\quad (P_0, Q_0 \text{ は図中の通り}) \end{aligned}$$



・ $|\overrightarrow{PQ}|$ の最大のとき (zx 平面で考える)



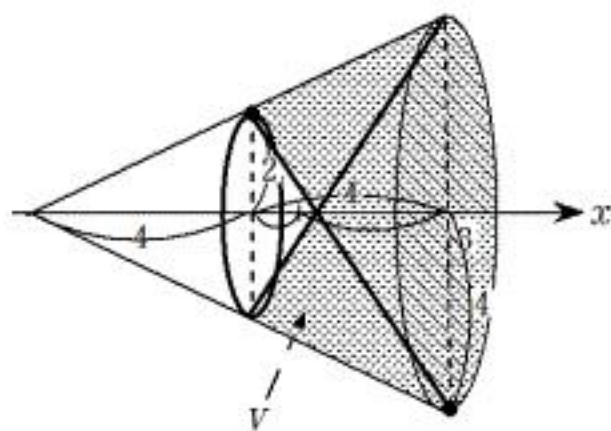
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &\leq |\overrightarrow{P_1Q_1}| = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} + \sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{13}}{3} + \frac{2\sqrt{13}}{3} \\ &= 2\sqrt{13} \quad (P_1, Q_1 \text{ は図中の通り}) \end{aligned}$$

以上より,

$$\underline{4 \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq 2\sqrt{13}} \quad (\text{答})$$

(3) 求める体積を V とする(右図の通り)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(128 - 16 - \frac{16}{3} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{320}{9} \pi}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



4. (1) $a_1=1$ より b_1 は $\frac{1}{a_1}=1$ より大きい最小の自然数より、 $b_1=2$ (答)

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{b_1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (答)} \quad \text{より, } b_2 \text{ は } \frac{1}{a_2} = 2 \quad \text{より大きい最小の自然数より, } \underline{b_2=3 \text{ (答)}}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (答)} \quad \text{より, } b_3 \text{ は } \frac{1}{a_3} = 6 \quad \text{より大きい最小の自然数より, } \underline{b_3=7 \text{ (答)}}$$

(2) 「 $\frac{1}{a_n}$ は自然数 ($n=1, 2, 3, \dots$)」 $\dots\dots(*)$ を帰納法で示す.

(I) $n=1$ のとき, $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$ (成立)

(II) $n=k$ で成立を仮定, つまり, $\frac{1}{a_k}$ を自然数 m とすると, $b_k = m+1$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{1}{b_k} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)} \quad \text{よって, } \frac{1}{a_{k+1}} = m(m+1) \quad \text{となり, 自然数.}$$

よって, $n=k+1$ でも成立. 以上(I), (II)より $(*)$ は示された.

$$\text{これと, 題意より, } \frac{1}{a_n} + 1 = b_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{さらに, } a_{n+1} = a_n - \frac{1}{b_n} \text{ (条件(iii))} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } b_n a_{n+1} = a_n b_n - 1 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} = a_n \quad (\because \textcircled{1})$$

よって,

$$b_1 b_2 b_3 \dots\dots b_{n-1} \underline{b_n a_{n+1}}$$

$$= b_1 b_2 b_3 \dots\dots \underline{b_{n-1} a_n}$$

$$= b_1 b_2 b_3 \dots\dots \underline{b_{n-2} a_{n-1}}$$

$\vdots$

$$= b_1 a_2$$

$$= a_1$$

$$\underline{= 1 \text{ (答)}}$$

(3) $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots\dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1} \\ &= 1 - a_{n+1} \end{aligned}$$

また, (2) で $b_k = m+1$ ($b_1=2$) のとき,

$$b_{k+1} = m(m+1) + 1$$

$$= m^2 + m + 1$$

$$= m^2 + (m+1)$$

より, 数列 $\{b_n\}$ は増加列とわかる

$$\textcircled{1} \text{ の } \frac{1}{a_n} + 1 = b_n \quad \text{より} \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +0}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_{n+1}) = \underline{1 \text{ (答)}}$$

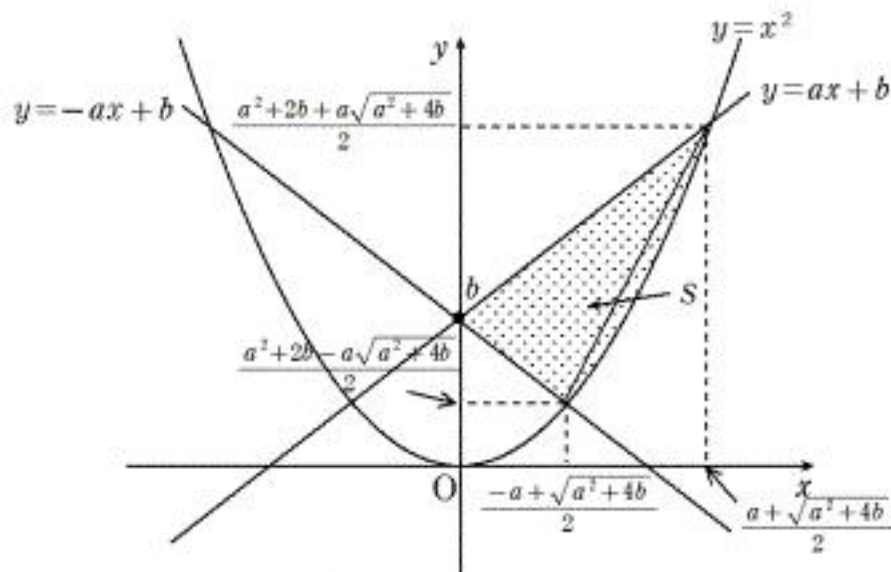
5.

$$(1) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x^2 \\ \{ax + (y - b)\} \{ax - (y - b)\} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x^2 \\ y \leq -ax + b \\ y \leq ax + b \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x^2 \\ y \leq -ax + b \\ y \geq ax + b \end{cases}$$

(右図の通り)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \cdot \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 4b}}{2} - \frac{a^2 - a\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right| \\ &\quad - \int_{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}}^{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}} \left(x - \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right) \left(x - \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} |8ab| + \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{6} a^3 + ab \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



$$(2) \quad b^2 = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \quad \text{より} \quad b = \frac{3}{4} \sqrt{4 - a^2} \quad \left(0 < a < 2, 0 < b < \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{ここで, } S = f(a) = \frac{1}{6} a^3 + \frac{3a}{4} \sqrt{4 - a^2} \quad (0 < a < 2) \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{2} a^2 + \frac{3}{4} \sqrt{4 - a^2} + \frac{3a}{4} \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{4 - a^2}} \\ &= \frac{a^2 \sqrt{4 - a^2} + 6 - 3a^2}{2\sqrt{4 - a^2}} \\ &= \frac{(3 - a^2)(a^2 + 8a^2 - 12)}{2\sqrt{4 - a^2} (a^2 \sqrt{4 - a^2} + 3a^2 - 6)} \end{aligned}$$

$a^2 = 2\sqrt{7} - 4, 3$ にて $f'(a) = 0$ となるので, 増減表は次の通り.

($a = \sqrt{2\sqrt{7} - 4}$ の前後で $f'(a)$ の符号は変化しない)

a	(0)	...	$\sqrt{3}$	...	(2)
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	(0)	↗	(最大)	↘	$\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\therefore (S \text{ の最大値}) = f(\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

$$\therefore (a, b) = \left(\sqrt{3}, \frac{3}{4} \right) \text{ のとき } (\text{答})$$