

A 2

数 学

(平成 29 年 度)

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 6—1 から A 6—3)の 5 箇所(記入欄)に必ず記入しなさい。(A 6—1, A 6—2 は表裏の 2 箇所, A 6—3 は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 6—1 から A 6—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

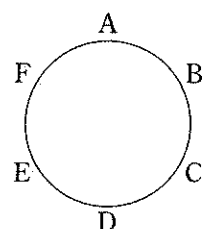
(1) 関数 $f(x) = (3 - x)e^x$ について、関数の増減、極値、グラフの凹凸を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明なしで用いてよい。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$$

を求めよ。

- 2 円卓に A, B, C, D, E, F の 6 人が下の図のように座っており、さいころが 1 個ある。



このとき、次の試行(*)を繰り返し、得点を獲得していくゲームを考える。ただし、ゲーム開始時は、A がさいころを持っており、各自の持ち点は 0 点であるとする。

さいころを持っている人が、そのさいころを 1 回投げて、出た目を k (*) とする。このとき、投げた人から時計回りに k 人目の人がさいころを受け取り、さいころを受け取った人の持ち点に k 点が加算される。

たとえば、A がさいころを投げて 5 の目が出た場合は、F がさいころを受け取り、F の持ち点に 5 点が加算される。

試行(*)を 4 回繰り返してゲームを終了する。次の問いに答えよ。

- (1) ゲーム終了時に A の持ち点が 0 点である確率を求めよ。
- (2) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点である確率を求めよ。
- (3) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点であるとき、E の持ち点が 3 点である条件付き確率を求めよ。

- 3 空間に2つの定点 O, A があり, $|\overrightarrow{OA}| = 2$ をみたしている。また, 2点 P, Q は次の条件をみたしながら動く。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &\leq 5, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6 \\ |\overrightarrow{OQ}| &= \sqrt{5}, \quad \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = -2 \end{aligned}$$

ただし, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$ は $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

- (1) $|\overrightarrow{OP}|$ の最小値を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{PQ}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) 線分 PQ が通過してできる部分の体積を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

(i) $a_1 = 1$, $a_n \neq 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

(ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, b_n は $\frac{1}{a_n}$ より大きい最小の自然数である。

(iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{b_n}$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

(1) b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。

(2) $b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

5 正の実数 a, b に対して、連立不等式

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x^2 \\ a^2x^2 - (y - b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

が表す xy 平面上的領域の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a, b の式で表せ。

(2) a, b が

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{9} = 1 \quad (a, b > 0)$$

をみたしながら動くとき、 S の最大値およびそのときの a, b の値を求めよ。