1

(1)

$$a_n = 0, 1, 2$$
$$b_1 = 1, 3b_{n+1} = 5a_n + b_n \quad \cdots\cdots ①$$

①で $n=1$ を代入

$$3b_2 = 5a_1 + 1 = 6 \qquad a_1 = 1$$
$$\therefore b_2 = 2$$

①で $n=2$ を代入

$$3b_3 = 5a_2 + 2 = 12 \qquad a_2 = 2$$
$$\therefore b_3 = 4$$

①で $n=3$ を代入

$$3b_4 = 5a_3 + 4 = 9 \qquad a_3 = 1$$
$$\therefore b_4 = 3$$

①で $n=4$ を代入

$$3b_5 = 5a_4 + 3 = 3 \qquad a_4 = 0$$
$$\therefore b_5 = 1$$

以上より，$(b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 4, 3, 1)$ （答）

(2) a_n は周期的巡回群により，

$$\begin{cases} a_{4k-3} = 1 \\ a_{4k-2} = 2 \\ a_{4k-1} = 1 \\ a_{4k} = 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(i) $n = 4m-3$ $(m \geqq 1)$ のとき

$$S_n = S_{4m-3} = \sum_{k=1}^{4m-3} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4}) + a_{4m-3}$$
$$= 4(m-1) + 1$$
$$= 4m - 3 \ (m \geqq 2,\ m=1\text{もみたす})$$
$$= n$$

(ii) $n = 4m-2$ $(m \geqq 1)$ のとき

$$S_n = S_{4m-2} = \sum_{k=1}^{4m-2} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4}) + a_{4m-3} + a_{4m-2}$$
$$= 4(m-1) + 1 + 2$$
$$= 4m - 1 \ (m \geqq 2,\ m=1\text{もみたす})$$
$$= n + 1$$

(iii) $n = 4m-1$ $(m \geqq 1)$ のとき

$$S_n = S_{4m-1} = \sum_{k=1}^{4m-1} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4}) + a_{4m-3} + a_{4m-2} + a_{4m-1}$$
$$= 4(m-1) + 1 + 2 + 1$$
$$= 4m \ (m \geqq 2,\ m=1\text{もみたす})$$
$$= n + 1$$

(iv) $n = 4m$ $(m \geqq 1)$ のとき

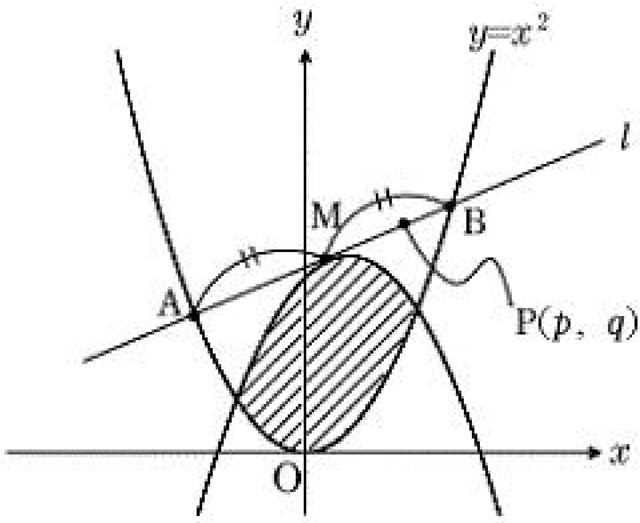
$$S_n = S_{4m} = \sum_{k=1}^{4m} a_k = \sum_{k=1}^{m} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4})$$
$$= 4m$$
$$= n$$

以上まとめて，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n \ (\ n\text{ が }4\text{ の倍数 または }4\text{の倍数余り}1\text{ のとき}) \\ n+1 \ (\ n\text{ が }4\text{ の倍数余り}2\text{ または余り}3\text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{（答）}$$

3

(1)



$$l: y=t(x-p)+q$$
$$\Longleftrightarrow y=tx+q-pt$$

ここで，

$$x^2=tx+q-pt$$
$$x^2-tx+pt-q=0 \quad \cdots\cdots ①$$

①は $q>p^2$ の条件下で異なる実数解をつねにもち，

それを $x=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とし， $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$ とおく．

(②より)

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=t & \cdots\cdots ②\\ \alpha\beta=pt-q\end{cases}$$

2 点 A，B の中点を M とすると， $\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=\left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{t^2}{2}-pt+q\right)$

ここで，

$$tx+q-pt=-x^2+ax+b$$
$$\Longleftrightarrow x^2+(t-a)x+q-pt-b=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③が $x=\dfrac{t}{2}$ で重解をもつから

$$x^2+(t-a)x+q-pt-b=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2$$
$$=x^2-tx+\frac{t^2}{4}$$

と表せる．

$$\begin{cases}t-a=-t\\ q-pt-b=\dfrac{t^2}{4}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}a=2t\\ b=q-pt-\dfrac{t^2}{4}\end{cases} \quad (答)$$

(2)

$$x^2=-x^2+2tx+q-pt-\frac{t^2}{4}$$
$$\Longleftrightarrow 2x^2-2tx+\frac{t^2}{4}+pt-q=0 \quad \cdots\cdots ④$$

④は $q>p^2$ の条件下で異なる 2 つの実数解 $x=\gamma, \delta\ (\gamma<\delta)$ をもち，

$$\begin{cases}\gamma+\delta=t\\ \gamma\delta=\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{p}{2}t-\dfrac{q}{2}\end{cases} \quad \cdots\cdots ⑤$$

C_1 と C_2 で囲まれる領域の面積を S とおく．

$$S=-\int_{\gamma}^{\delta} 2(x-\gamma)(x-\delta)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}(\delta-\gamma)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(\delta-\gamma)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{t^2-4\left(\frac{t^2}{8}+\frac{p}{2}t-\frac{q}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

(⑤より)

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}(t^2-4pt+4q)^{\frac{3}{2}} \quad (答)$$

(3) $f(t)=t^2-4pt+4q$ とおくと

$$f(t)=(t-2p)^2+4q-4p^2$$

$t=2p$ のとき， $f(t)$ は最小値 $\underbrace{4(q-p^2)}_{(正)}$ をとる．

$$\therefore S_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{12}\{f(2p)\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\{4(q-p^2)\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}(q-p^2)^{\frac{3}{2}} \quad (答)$$