1

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'dx = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2 \qquad \text{(答)}}}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos^2 x > 0$

ここで，$a = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt$ （a：実数）とおくと，

$$f(x)\cos^2 x = \pi - \frac{x}{\log 2}a \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{\pi}{\cos^2 x} - \frac{a}{\log 2}\cdot\frac{x}{\cos^2 x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

ここで，

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{\cos^2 t}dt - \frac{a}{\log 2}\underline{\underline{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t}dt}}$$

$(\because\ (1))$

$$= \pi[\tan t]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{a}{\log 2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2\right)$$

$$= \sqrt{3}\pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{3\log 2}a + a \qquad \therefore\ a = 3\log 2$$

以上より，

$$\underline{f(x) = \frac{\pi}{\cos^2 x} - \frac{3x}{\cos^2 x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(答)}}$$

2

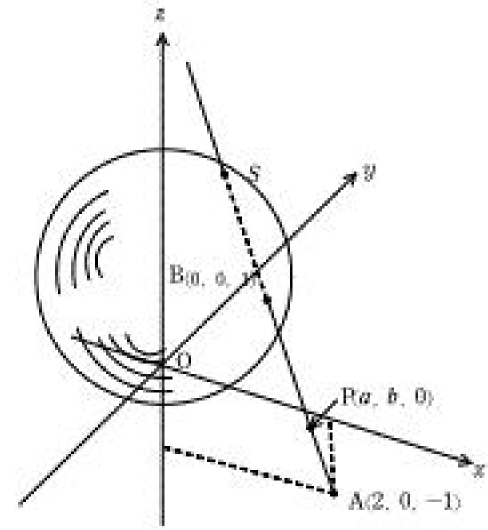
(1)

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=t\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}$$

$$=(1-t)(2,0,-1)+t(a,b,0)$$

$$=\underline{((a-2)t+2,bt,t-1)} \qquad (答)$$



(2) 球面 S の方程式は，

$$x^2+y^2+(z-1)^2=2 \quad \cdots\cdots①$$

(1)の結果を用いて，①へ代入．

$$\{(a-2)t+2\}^2+(bt)^2+(t-2)^2=2$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\underbrace{(a-2)^2+b^2+1}_{(正)}\}t^2+4(a-3)t+6=0 \quad \cdots\cdots②$$

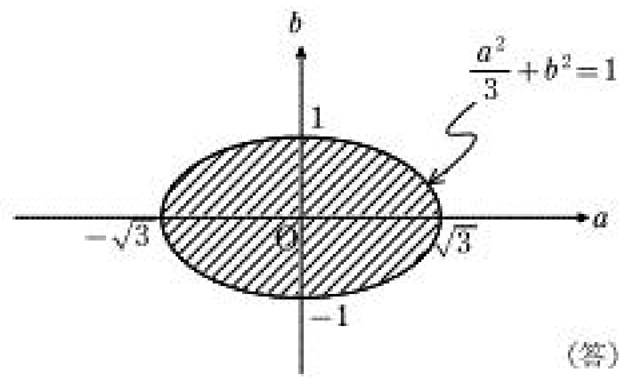
②の方程式が実数解をもてばよいから，

$$D/4=4(a-3)^2-6\{(a-2)^2+b^2+1\}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{3}+b^2\leq 1$$

ab 平面に図示すると右図の通り．

(図の斜線部分，ただし，境界を含む)



(答)

(3) $Q_x=(a-2)t+2=-1$ とおくと，

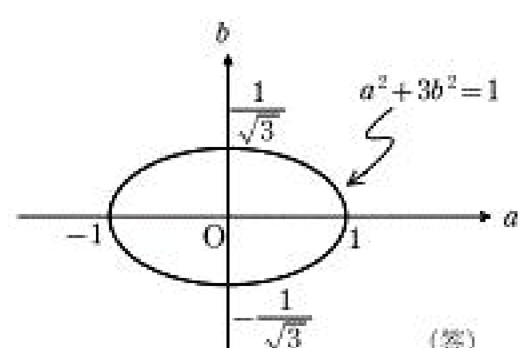
$$t=\frac{3}{2-a} \qquad (a\neq 2 としてよい)$$

よって， $Q\left(-1,\frac{3b}{2-a},\frac{1+a}{2-a}\right)$ と表せるから①へ代入．

$$(-1)^2+\left(\frac{3b}{2-a}\right)^2+\left(\frac{1+a}{2-a}-1\right)^2=2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+3b^2=1 \qquad \left(a^2+\frac{b^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1\right)$$

ab 平面に図示すると右図の通り．（$a\neq 2$ をみたす）



(答)

3

(1) $w=\dfrac{z+2\alpha}{z+\alpha}$ $(z\neq-\alpha)$ より，$w\neq1$ のもとで $z=\dfrac{(2-w)\alpha}{w-1}$ $(\alpha\neq0)$

ここで，$|z-1|=1$ の代入をすると，

$$\left|\frac{(2-w)\alpha}{w-1}-1\right|=1 \iff |w-1|=|(\alpha+1)w-(2\alpha+1)| \quad\cdots\cdots①$$

①が $|w-1|=1$ をみたすことから，$|(\alpha+1)w-(2\alpha+1)|=1$

が必要となり，$\alpha=-1$

このとき，

$$w=\frac{z-2}{z-1}\ (z\neq1) \iff z=\frac{w-2}{w-1}\ (w\neq1)$$

$|w-1|=1, |z-1|=1$ をみたす．　　$\underline{\alpha=-1}$ (答)

(2) $w=z$ のとき，

$$z=\frac{z-2}{z-1}\ (z\neq1)$$
$$\iff z^2-2z+2=0\ (z\neq1)$$
$$\therefore\ z=1\pm i$$ (答)

(3) 実数 x, y を用いて，$z=x+yi$ とおく．ただし，$z\neq1$ かつ $z\neq1+i$

$$w=\frac{z-2}{z-1}=\frac{(x-2)+yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{(x-2)+yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\frac{x^2-3x+2+y^2+yi}{(x-1)^2+y^2}$$

ここで，

$$\frac{w-z_0}{z-z_0}=\frac{\dfrac{x^2-3x+2+y^2+yi}{(x-1)^2+y^2}-(1+i)}{x+yi-(1+i)}$$
$$=\frac{\left(x^2-3x+2+y^2+yi-(1+i)\{(x-1)^2+y^2\}\right)\{(x-1)-(y-1)i\}}{\{(x-1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+(y-1)^2\}}$$

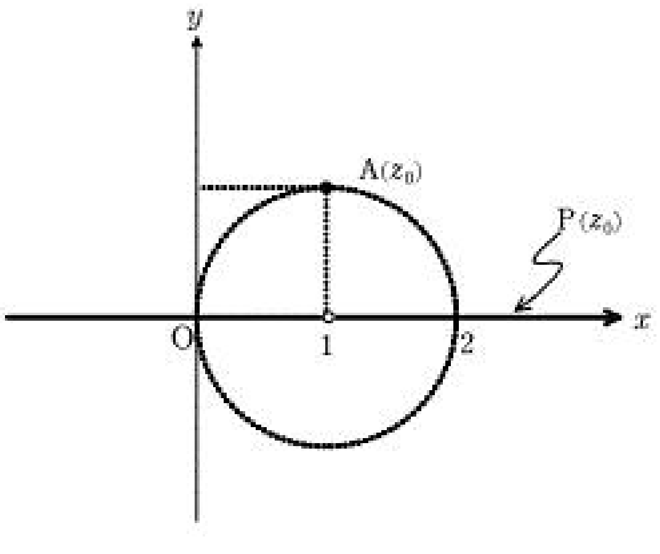
これが純虚数となればよいので，(分子)に注目する．

$$\left(x^2-3x+2+y^2+yi-(1+i)\{(x-1)^2+y^2\}\right)\{(x-1)+(1-y)i\}$$
$$=\{(1-x)+(y-y^2-x^2+2x-1)i\}\{(x-1)+(1-y)i\}$$
$$=(1-x)(x-1)-(y-y^2-x^2+2x-1)(1-y)+(1-x)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}i$$
$$=-y\{(x-1)^2+(y-1)^2\}+(1-x)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}i$$
$$=\{\underbrace{(x-1)^2+(y-1)^2}_{\neq0\ (\because\ z\neq1+i)}\}\{-y+(1-x)i\} \quad \leftarrow (\text{純虚数})$$

$$\therefore\ y=0\ \left(z=x\ \text{ただし}, x\neq1\right)$$

図示すると下図の通り．

（x 軸上（実軸上）で 1 を除く）



4

(1) $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ を順に求めてゆくと，
周期的巡回群により，

$$\therefore \begin{cases} a_{4k-3}=1\\ a_{4k-2}=2\\ a_{4k-1}=1\\ a_{4k}\ \ =0\end{cases} (k=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad \therefore \begin{cases} b_{4k-3}=1\\ b_{4k-2}=2\\ b_{4k-1}=4\\ b_{4k}\ \ =3\end{cases} (k=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad (答)$$

(2) 「$0<b_n<5\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$」$\cdots\cdots(*)$ を示す．

（Ⅰ）$n=1$ のとき，　$b_1=1$ より，$0<b_1<5$ をみたす．

（Ⅱ）$n=k$ で成立を仮定する．すなわち，$0<b_k<5$

$$cb_{k+1}=5a_k+b_k \left(\Leftrightarrow \quad b_{k+1}=\frac{5a_k+b_k}{c}\right) \leftarrow \left(ただし，\underline{\underline{b_{k+1}\ は整数}}\right)$$

ここで，　$a_k=0,1,2,\cdots\cdots,c-1$ に注意して

$$\begin{aligned} & 0<b_k<5 \\ \Leftrightarrow\quad & 5a_k<5a_k+b_k<5a_k+5 \\ \therefore\ & 0\le 5a_k<5a_k+b_k<5a_k+5\le 5(c-1)+5 \\ \Big(\Leftrightarrow\quad & 0<\frac{5a_k+b_k}{c}<5\Big) \end{aligned}$$

これより，　$b_{k+1}=\underbrace{\boxed{\frac{5a_k+b_k}{c}}}_{(整数)}$ のときも $0<b_{k+1}<5$ となり，$n=k+1$ でも成立．

以上(Ⅰ)(Ⅱ) より，$(*)$ は成立．

つまり，　$0<b_n<5\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ は示された．(証明終)

(3) $c=5l+4\ \ (l\ge 0),\ a_n=0,1,2,\cdots\cdots,5l+3$ に注意して，
$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ を順に求めてゆくと，各 a_n, b_n は一意的に定まり

「
$$\therefore \begin{cases} a_{2k-1}=4l+3\\ a_{2k}\ \ =l\end{cases},\ \begin{cases} b_{2k-1}=1\\ b_{2k}\ \ =4\end{cases} (k=1,2,3,\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots(*)\ と推定．$$
」

（Ⅰ）$k=1$ のとき

$$\begin{aligned} (b_1=1)\quad & cb_2=5a_1+b_1 \\ \Leftrightarrow\quad & (5l+4)b_2=5a_1+1 \\ \Leftrightarrow\quad & b_2=\frac{5a_1+1}{5l+4} \leftarrow (整数)\ \ (a_1=0,1,2,\cdots\cdots,5l+3) \\ \therefore\ & \underline{\underline{a_1=4l+3,\ b_2=4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_2=4)\quad & cb_3=5a_2+b_2 \\ \Leftrightarrow\quad & (5l+4)b_3=5a_2+4 \\ \Leftrightarrow\quad & b_3=\frac{5a_2+4}{5l+4} \\ \therefore\ & \underline{\underline{a_2=l,\ b_3=1}} \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{cases} a_1=4l+3\\ a_2=l\end{cases},\quad \begin{cases} b_1=1\\ b_1=4\end{cases}\ となり，\quad k=1\ のとき\ (*)\ は成立．$$

（Ⅱ）$k=i\ \ (\ge 1)$ で成立を仮定．

つまり，

$$\begin{cases} a_{2i-1}=4l+3\\ a_{2i}\ \ =l\end{cases},\ \begin{cases} b_{2i-1}=1\\ b_{2i}\ \ =4\end{cases} \qquad と仮定する．$$

ここで，

$$\begin{aligned} & cb_{2i+1}=5a_{2i}+b_{2i} \\ \Leftrightarrow\quad & (5l+4)b_{2i+1}=5l+4 \\ \Leftrightarrow\quad & \underline{\underline{b_{2i+1}+1}} \end{aligned}$$

同じく，

$$\begin{aligned} & cb_{2i+2}=5a_{2i+1}+b_{2i+1} \\ \Leftrightarrow\quad & (5l+4)b_{2i+2}=5a_{2i+1}+1 \\ \Leftrightarrow\quad & b_{2i+2}=\frac{5a_{2i+1}+1}{5l+4} \leftarrow (整数)\ \ (a_{2i+1}=0,1,2,\cdots\cdots,5l+3) \\ & \therefore\ \underline{\underline{a_{2i+1}=4l+3,\ b_{2i+2}=4}} \end{aligned}$$

同じく，

$$\begin{aligned} & cb_{2i+3}=5a_{2i+2}+b_{2i+2} \\ \Leftrightarrow\quad & (5l+4)b_{2i+3}=5a_{2i+2}+4 \\ \Leftrightarrow\quad & b_{2i+3}=\frac{5a_{2i+2}+4}{5l+4} \leftarrow (整数)\ \ (a_{2i+1}=0,1,2,\cdots\cdots,5l+3) \\ & \therefore\ \underline{\underline{a_{2i+2}=l}},\ b_{2i+3}=1 \end{aligned}$$

つまり，

$$\begin{cases} a_{2i-1}=4l+3\\ a_{2i}\ \ =l\end{cases},\ \begin{cases} b_{2i-1}=1\\ b_{2i}\ \ =4\end{cases} \qquad と仮定すると，$$

$$\begin{cases} a_{2i+1}=4l+3\\ a_{2i+2}=l\end{cases},\ \begin{cases} b_{2i+1}=1\\ b_{2i+2}=4\end{cases} が示された．$$

つまり，　$k=i$ で成立しすれば，　$k=i+1$ でも成立．

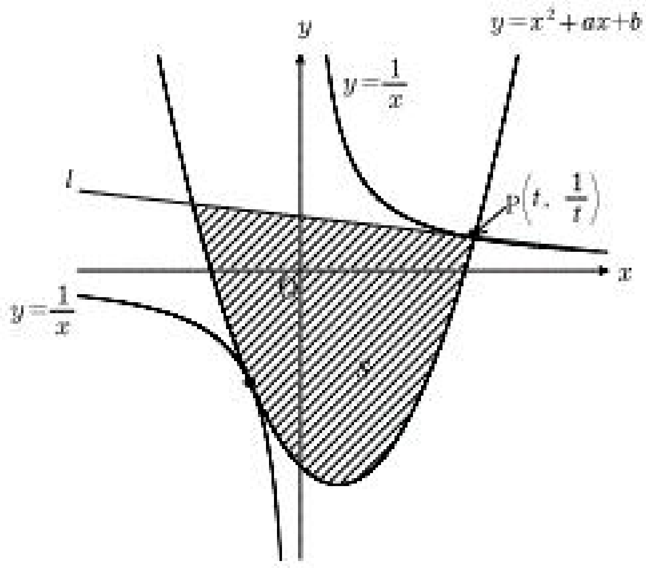
以上(Ⅰ)(Ⅱ) より，$(*)$ は示された．

よって、

$$\underline{\therefore \begin{cases} a_{2k-1}=4l+3\\ a_{2k}\ \ =l\end{cases},\ \begin{cases} b_{2k-1}=1\\ b_{2k}\ \ =4\end{cases} (k=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad (答)}$$

5

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$ より，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



$\mathrm{P}\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ での接線 l の方程式は

$$l : y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad (t>0) \qquad (答)}$$

(2)　$y=x^2+ax+b$ は $\mathrm{P}\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ を通るから，

$$t^2+at+b=\frac{1}{t} \quad \cdots\cdots ①$$

さらに，

$$x^2+ax+b=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+ax^2+bx-1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-t)\left(x+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2=0$$

と表せるから，

$$\begin{cases} a=\dfrac{2}{\sqrt{t}}-t \\ b=\dfrac{1}{t}-2\sqrt{t} \end{cases} \quad (①をみたす) \quad (答)$$

(3)　(2)の結果を利用して，

$$x^2+\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-t\right)x+\frac{1}{t}-2\sqrt{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-t+\frac{1}{t^2}\right)x-2\sqrt{t}-\frac{1}{t}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-t)\left(x+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}\right)=0 \qquad \therefore \ \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}}_{(負)},\ \underbrace{t}_{(正)}$$

$$S=-\int_{-\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}}^{t}\left(x+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}\right)(x-t)\,dx$$

$$=\underline{\frac{1}{6}\left(t+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}\right)^3 \quad (t>0) \qquad (答)}$$

(4)　$f(t)=t+\dfrac{2}{\sqrt{t}}+\dfrac{1}{t^2}$ とおく．

「<u>S が最小のとき</u>」$\Leftrightarrow$ 「<u>$f(t)$ が最小のとき</u>」

ここで，

$$f'(t)=1-t^{-\frac{3}{2}}-2t^{-3}$$

$$=\frac{t^3-t\sqrt{t}-2}{t^3}$$

$$=\frac{(t\sqrt{t}+1)(t\sqrt{t}-2)}{t^3}$$

t	(0)	$\cdots$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	(最小)	↗	

増減表より，$t=2^{\frac{2}{3}}$ $(t\sqrt{t}=2)$ のとき，$f(t)$ は最小となるので，

$$(S の最小値)=\frac{1}{6}\left\{f\left(2^{\frac{2}{3}}\right)\right\}^3=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$=\underline{\frac{243}{32} \qquad (答)}$$