

A 2

数 学

(平成 30 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 6—1 から A 6—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(A 6—1, A 6—2 は表裏の 2 箇所, A 6—3 は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙(A 6—1 から A 6—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ を求めよ。

(2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x) \cos^2 x = \pi - \frac{x}{\log 2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) dt$$

をみたすとき、 $f(x)$ を求めよ。

2 O を原点とする xyz 空間に点 $A(2, 0, -1)$, および, 中心を点 $B(0, 0, 1)$ とする半径 $\sqrt{2}$ の球面 S がある。平面 $z = 0$ 上の点 $P(a, b, 0)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AP 上の点 Q に対して $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ と表すとき, $\overrightarrow{OQ}$ を a, b, t を用いて表せ。
- (2) 直線 AP が球面 S と共有点をもつとき, 点 P の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (3) 球面 S と平面 $x = -1$ の共通部分を T とする。直線 AP が T と共有点をもつとき, 点 P の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。

3 α を複素数とする。 $z \neq -\alpha$ をみたす複素数 z に対して、 $w = \frac{z+2\alpha}{z+\alpha}$ と定める。 $|z-1|=1$ をみたすようなすべての z に対して、 $|w-1|=1$ が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) α を求めよ。

(2) $w = z$ をみたす z を求めよ。

(3) $z_0 = 1+i$ とし、 $z \neq z_0$ かつ $z \neq -\alpha$ とする。複素数平面上の 3 点 $A(z_0)$, $P(z)$, $Q(w)$ を考える。直線 AP と直線 AQ が垂直に交わるような点 P の全体を表す図形を、複素数平面上に図示せよ。

4 c を 5 で割り切れない 2 以上の整数とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

(i) a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は $0, 1, \dots, c-1$ のいずれかである。

(ii) b_n は

$$b_1 = 1, \quad cb_{n+1} = 5a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす整数である。

次の問いに答えよ。

(1) $c = 3$ のとき, a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $0 < b_n < 5$ を示せ。

(3) $c = 5\ell + 4$ (ℓ は 0 以上の整数) のとき, a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

5 xy 平面上に双曲線 $C_1: y = \frac{1}{x}$ がある。 C_1 上の点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ($t > 0$) における C_1 の接線を ℓ とする。放物線 $C_2: y = x^2 + ax + b$ (a, b は実数) は点 P を通り、 C_1 と第 3 象限において共有点をただ 1 つもつとする。 C_2 と ℓ で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) ℓ の方程式を求めよ。
- (2) a, b をそれぞれ t の式で表せ。
- (3) S を t の式で表せ。
- (4) t が正の実数全体を動くとき、 S の最小値を求めよ。

