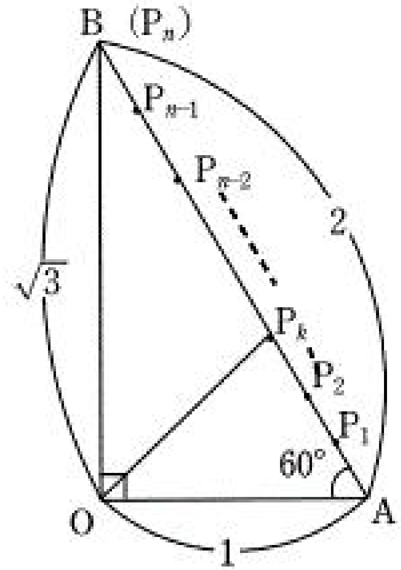
1

(1)　$\triangle \mathrm{OAP_k}$ について，余弦定理より，

$$\mathrm{OP}_k{}^2 = 1^2 + \left(\frac{2k}{n}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot \frac{2k}{n}\cdot \cos 60^\circ$$
$$= \frac{4k^2}{n^2} - \frac{2k}{n} + 1$$
$$\therefore\ \mathrm{OP}_k = \sqrt{\frac{4k^2}{n^2} - \frac{2k}{n} + 1} \qquad (答)$$



(2)

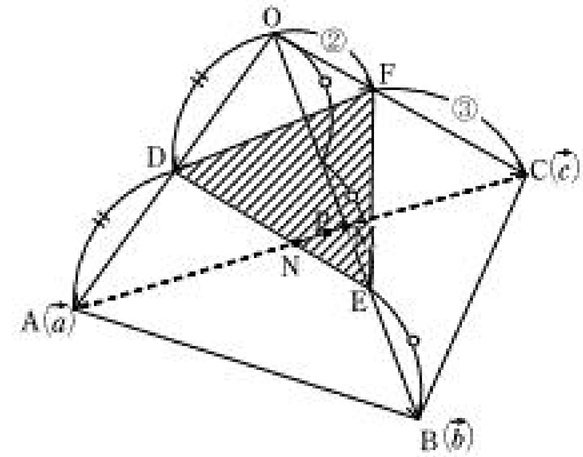
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\mathrm{OP}_k)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\dfrac{4k^2}{n^2} - \dfrac{2k}{n} + 1}$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 - 2x + 1}$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{4\left\{\dfrac{3}{16} + \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2\right\}}$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\cdot\dfrac{3}{16}(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \qquad (答)$$

$$\left(\begin{array}{l} x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\tan\theta \\ \therefore\ dx = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{6} & \to & \frac{\pi}{3} \end{array} \end{array}\right)$$

2

(1)

$$\begin{cases} |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1 \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\\&=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MN}|^2&=\frac{1}{4}\left(1+1+1+2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\right)\ (\because ①)\\&=\frac{2}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ （答）

(2) $\overrightarrow{OP}$は実数 t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{ON}\\&=(1-t)\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+t\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})\\&=\frac{t}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

と表せる．さらに，$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OF}$を用いると，

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OD}+\frac{3}{4}(1-t)\overrightarrow{OE}+\frac{5t}{4}\overrightarrow{OF}$$

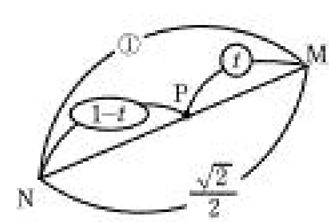
点 P は平面 DEF 上にあるので，

$$t+\frac{3}{4}(1-t)+\frac{5t}{4}=1 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$$ （答）

(3) (1)，(2)より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MP}|&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{6}\quad\left(t=\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$ （答）



3

(1)

$$
\begin{aligned}
p\left(X_n=2\right)&=p\left(\text{最小 2 以上}\right)-p\left(\text{最小 3 以上}\right)\\
&=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\\
&=\frac{5^n-4^n}{6^n}\qquad(\text{答})
\end{aligned}
$$

(2)　「6の目が少なくとも2回以上」となる確率を求めればよい．

6の目が出た回数が k 回 $\left(k=0,1,2,\cdots\cdots,n\right)$ の確率を $p(k)$ とすると，

$$
p(0)+p(1)+\underbrace{p(2)+\cdots\cdots+p(n)}_{p(X_2=6)}=1
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ p\left(X_2=6\right)&=1-\{p(0)+p(1)\}\\
&=1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}\\
&=\frac{6^n-5^n-n\cdot5^{n-1}}{6^n}\\
&=\frac{6^n-(n+5)\cdot5^{n-1}}{6^n}\qquad(\text{答})
\end{aligned}
$$

(3)　　$6\geqq6\geqq\boxed{X_3\geqq X_4\geqq\cdots\cdots\geqq X_{n-1}}\geqq2$

$X_3\sim X_{n-1}$ は　2 or 3 or 4 or 5 or 6 のいずれか．

6の目の回数を k 回 $(2\leqq k\leqq n-1)$ とすると，

求める確率は

$$
\sum_{k=2}^{n-1}{}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\underbrace{\left\{\overset{(2\sim5\text{の目})}{\left(\frac{4}{6}\right)^{n-k}}-\overset{(3\sim5\text{の目})}{\left(\frac{3}{6}\right)^{n-k}}\right\}}_{(2\text{の目は少なくとも}1\text{回は出る})}
$$

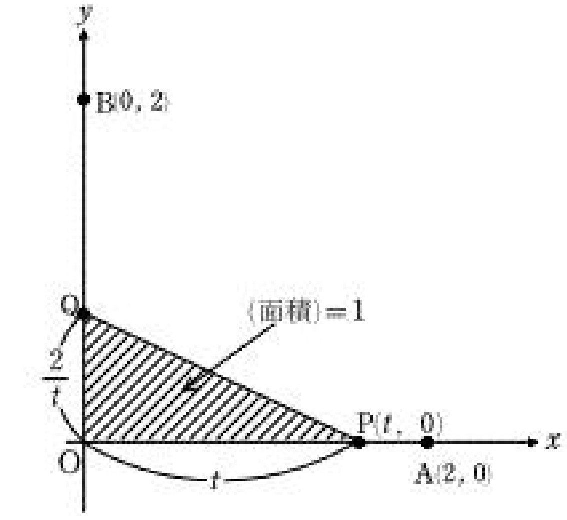
$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{4}{6}\right)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{3}{6}\right)^{n-k}-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\frac{n}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^n\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{3}{6}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^n\\
&=\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)^n-\frac{4^n+n\cdot4^{n-1}}{6^n}+\frac{3^n+n\cdot3^{n-1}}{6^n}\\
&=\frac{5^n-2\cdot4^n+3^n+n\left(3^{n-1}-4^{n-1}\right)}{6^n}\qquad(\text{答})
\end{aligned}
$$

4

(1) $t>0$ としてよく，

$$\begin{cases} OP=t \\ OQ=\dfrac{2}{t} \end{cases}$$ より，

$$\begin{cases} 0<t\leqq 2 \\ 0<\dfrac{2}{t}\leqq 2 \end{cases} \qquad \therefore\ 1\leqq t\leqq 2 \qquad \text{（答）}$$



(2) $1\leqq t\leqq 2$ のもとで，直線 PQ の方程式は

$$y=-\frac{\frac{2}{t}}{t}x+\frac{2}{t}$$

$$\iff yt^2-2t+2x=0 \ \cdots\cdots ① \ \left(y\geqq 0 \text{として考えてよい}\right)$$

(i) $y=0$ のとき，$t=x$ より，$1\leqq x\leqq 2\ (y=0)$

(ii) $y>0$ のとき，①より，

$$f(t)=yt^2-2t+2x$$
$$=y\left(t-\frac{1}{y}\right)^2+2x-\frac{1}{y}$$

t の 2 次方程式①が $1\leqq t\leqq 2$ 上に少なくとも 1 つは実数解をもてばよい．

(ｱ) $1\leqq t\leqq 2$ に 2 実解(重解も含む)をもつとき

$$\begin{cases} 1\leqq \dfrac{1}{y}\leqq 2 \\ D/4=1-2xy\geqq 0 \\ f(1)=y-2+2x\geqq 0 \\ f(2)=4y-4+2x\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2}\leqq y\leqq 1 \\ xy\leqq \dfrac{1}{2} \\ y\geqq -2x+2 \\ y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$$

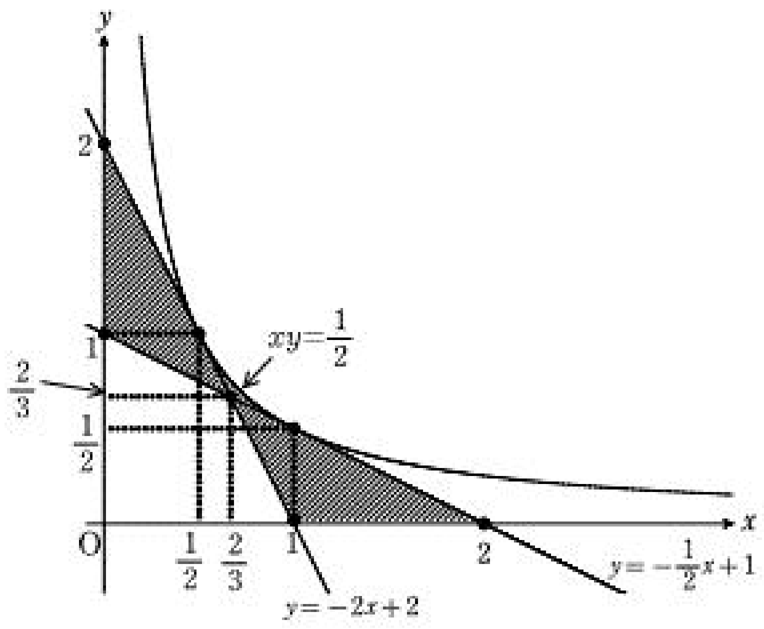
(ｲ) $1\leqq t\leqq 2$ に 1 実解をもつとき

$$f(1)\cdot f(2)\leqq 0 \iff \begin{cases} y\geqq -2x+2 \\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y\leqq -2x+2 \\ y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$$

以上(i)，(ii)(ｱ)(ｲ)を図示すると，次のページの図の通り．

線分 PQ の通過領域は右図の

斜線部分(ただし，境界は含まれる)．



(3)

$$S=\frac{1}{2}(1+2)\cdot\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{2x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+1\right)\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left[\log x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{1}{4}-\frac{5}{9}-\frac{1}{9}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log 2 \qquad \text{（答）}$$

5

(1)

$$f(x)=e^{-x}\sin x \qquad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$
$$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$$
$$=(\cos x-\sin x)e^{-x}$$

x	0	……	$\frac{\pi}{4}$	……	$\frac{5}{4}\pi$	……	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	0

増減表より，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ にて $f(x)$ は最小値をとる． （答）

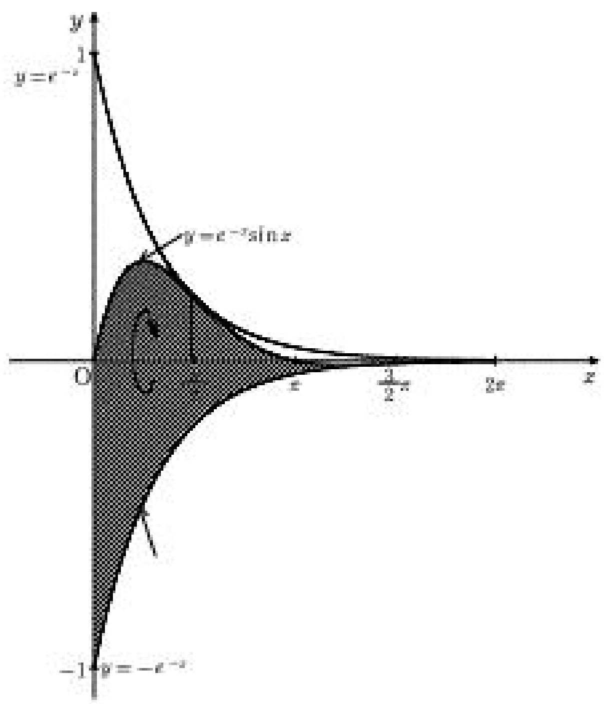
(2)

$$f(x)=g(x)$$
$$\Longleftrightarrow\ e^{-x}\sin x=-e^{-x}$$
$$\Longleftrightarrow\ \sin x=-1$$

ここで， $0\leqq x\leqq 2\pi$ より，

$$x=\frac{3}{2}\pi \qquad \text{（答）}$$

(3) (1)，(2)を用いて， $y=e^{-x}$，$y=-e^{-x}$，$y=e^{-x}\sin x$ を描き，回転させる領域を斜線で塗る．



$\left|e^{-x}\sin x\right|\leqq\left|-e^{-x}\right|$ より，

$$V=\pi\int_0^{\frac{3}{2}\pi}e^{-2x}\,dx-\pi\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}-\pi\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}e^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=-\frac{\pi}{2}(e^{-3\pi}-1)-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_\pi^{\frac{3}{2}\pi}+\frac{\pi}{2}\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{\pi}{2}(e^{-3\pi}-1)+\frac{\pi}{4}(e^{-3\pi}-e^{-2\pi})+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}(e^{-3\pi}+e^{-2\pi})$$
$$=\frac{\pi}{8}(4-e^{-3\pi}-e^{-2\pi}) \qquad \text{（答）}$$