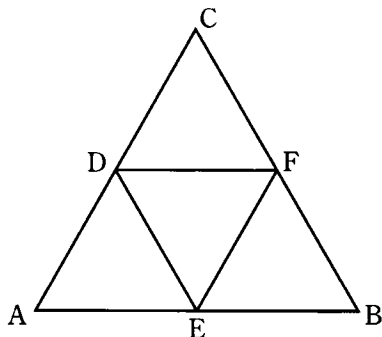


1 次の(ア), (イ), (ウ), (エ)の空欄に適する数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

- (1) 各組が13枚ずつからなる赤, 青, 黄, 緑の4組のカードがあり, それぞれ1から13までの番号が1つずつ書かれている。この52枚のカードは1つの袋に入っている。AとBの2人が次のようなゲームをする。この袋から1枚のカードをぬきだすとき, そのカードの色が赤であるか, またはカードの番号が10以上であればAの勝ち, それ以外であればBの勝ちとする。1回のゲームでAが勝つ確率は (ア) である。このゲームを n 回行うとき, Aが k 回勝つ確率は (イ) となる。ただし, 1回のゲームが終わるごとに, カードはもとに戻すものとする。
- (2) 下図において点Aから出発して, 線分に沿って移動する動点Pを考える。Pは各点A, B, C, D, E, Fにおいて, 1度通過した線分を除いて等しい確率で次の点に向かって移動する。ただし, A, B, Cのどれかに到達したら, そこで運動は終了する。このとき, PがAに戻る確率は (ウ) である。また, Bに到達する確率は (エ) である。



2 次の(カ), (キ), (ク), (ケ)の空欄に適する数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

- (1) 座標平面上の曲線 $C: y = \sqrt{x^2 + 1} (x > 0)$ の点 $P(t, \sqrt{t^2 + 1})$ における C の接線と x 軸との交点を Q とし、 P から x 軸に下ろした垂線の足を R とする。三角形 PQR の面積 $S(t)$ を t を用いて表すと (カ) となる。また、 $S(t)$ の最小値は (キ) である。

- (2) 定積分 $\int_0^{2\pi} |x \sin x| dx$ の値は (ク) である。

- (3) 複素数 $z = -1 + i$ に対して、集合

$$S = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \mid a_0, a_1, a_2 \text{ は } 0 \text{ または } 1\}$$

を考える。 S のなかで絶対値が最大の複素数は (ケ) である。

- 3 座標平面上に4点A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1)を頂点とする四角形ABCDがある。動点Pは x 座標, y 座標がともに正であり, 三角形ABPの面積が1となるように動くものとする。Pの x 座標を t とし, 三角形ABPと四角形ABCDの共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{S(t)}{t} dt$ を求めよ。

4 実数 $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ と行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda^n - \mu^n), \quad A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$2f_{n+1} + f_n = f_{n+3}, \quad 3f_{n+1} + 2f_n = f_{n+4}$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{3n+1} & f_{3n} \\ f_{3n} & f_{3n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n + c_n + d_n)$ を求めよ。