

〔Ⅰ〕

(1)

与式より

$$y' = \frac{1}{1+\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x(\cos x + \sin x)} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y' = \frac{1}{\cos x(\cos x + \sin x)} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

(2)

$x = 2\sin\theta$ とおくと、 x と θ の対応は以下のようになる。

x	-2	$\rightarrow$	2
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

よって、定積分 I は

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \sqrt{4-4\sin^2 \theta} 2\cos\theta d\theta \\ &= 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta - 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \end{aligned}$$

と変形できるが、ここで

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta &= \left[\sin^3 \theta (-\cos \theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta (-\cos \theta) d\theta \\ &= 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta &= \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{3}{8} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta &= \left[\sin^5 \theta \cos \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= -5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta &= \frac{5}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \\ &= \frac{5}{16} \pi \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} I &= 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta - 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \\ &= 24\pi - 20\pi \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = 4\pi$$

(3)

与式より

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{1-a^2}{2(1+a^2-2ax)} + \frac{1}{2} + \frac{1-a^2}{2(1+a^2+2ax)} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-a^4}{(-4a^2x^2+a^4+2a^2+1)} + 1 \end{aligned}$$

となるから、 $|a| > 1$ のとき、最大値は $f_a(0)$ で

$$f_a(0) = \frac{2}{1+a^2}$$

である。 $|a| < 1$ のとき、最大値は $f_a(-1) = f_a(1)$ で

$$f_a(-1) = f_a(1) = \frac{2}{1-a^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |a| > 1 \text{ のとき } \frac{2}{1+a^2}, \quad |a| < 1 \text{ のとき } \frac{2}{1-a^2}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$f(x)$ は多項式であるから任意の区間で連続である。 $f(x)=0$ となる x が $(-1, 1)$ に存在しないと仮定すると、 $f(x)$ の連続性から $(-1, 1)$ で常に $f(x) > 0$ か $f(x) < 0$ のどちらかである。このとき $\int_{-1}^1 f(x) dx \neq 0$ となるから、仮定に反する。よって $f(x)=0$ となる x が $(-1, 1)$ に存在する。

(証明終)

(2)

(1)より $f(x)=0$ となる x が $(-1, 1)$ に少なくとも一つ存在する。ここで $f(x)=0$ となる x が $(-1, 1)$ に一つしか存在しないと仮定し、その値を k とおく。すると多項式 $(x-k)f(x)$ は $x=k$ で 0、それ以外で正もしくは負の値を取る。よって

$$\int_{-1}^1 (x-k)f(x) dx = \int_{-1}^1 xf(x) dx - k \int_{-1}^1 f(x) dx \neq 0$$

となるが、これは仮定に反する。よって $f(x)=0$ となる x が $(-1, 1)$ に二個以上存在する。

(証明終)

【Ⅲ】

(1)

与式より

$$\begin{aligned}x_n^2-101y_n^2 &= \left(-10x_{n-1}+101y_{n-1}\right)^2-101\left(x_{n-1}-10y_{n-1}\right)^2 \\&= -\left(x_{n-1}^2-101y_{n-1}^2\right) \\&= (-1)^n\left(x_0-101y_0\right) \\&= 20(-1)^n\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

仮定より

$$x_n+\sqrt{101}y_n=\left(\sqrt{101}-10\right)\left(x_{n-1}+\sqrt{101}y_{n-1}\right)$$

となるから、 $\left\{x_n+\sqrt{101}y_n\right\}$ は公比 $\sqrt{101}-10$ の等比数列である。したがって

$$x_n+\sqrt{101}y_n=\left(\frac{1}{\sqrt{101}+10}\right)^n\left(x_0+\sqrt{101}y_0\right) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。いま、 x_0, y_0 が自然数であることより、 $x_0+\sqrt{101}y_0>1$ である。よって $x_0+\sqrt{101}y_0$ が

$$x_0+\sqrt{101}y_0=\left(10+\sqrt{101}\right)^N \quad (N=1,2,3,\cdots)$$

と表すことができなければ、

$$\left(10+\sqrt{101}\right)^k < x_0+\sqrt{101}y_0 < \left(10+\sqrt{101}\right)^{k+1} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

となる k がただ一つ存在する。この両辺に $\left(\frac{1}{\sqrt{101}+10}\right)^k$ をかければ、 $\textcircled{1}$ より、

$$1 < x_k+\sqrt{101}y_k < 10+\sqrt{101} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

となる k がただ一つ存在することがいえる。したがって

「 $x_0+\sqrt{101}y_0$ が

$$x_0+\sqrt{101}y_0=\left(10+\sqrt{101}\right)^N \quad (N=1,2,3,\cdots)$$

と表すことができないこと」

$\cdots \textcircled{2}$

を示せばよい。

[$\textcircled{2}$ の証明]

$x_0+\sqrt{101}y_0=\left(10+\sqrt{101}\right)^N \quad (N=1,2,3,\cdots)$ とかけると仮定して背理法で示す。 x_0, y_0 が自然

数であることと二項定理より、

$$\left(10+\sqrt{101}\right)^N = x_0+\sqrt{101}y_0 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

のとき

$$\left(10-\sqrt{101}\right)^N = x_0-\sqrt{101}y_0 \qquad \cdots \textcircled{4}$$

となる。 $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ の両辺をかけることにより、

$$\begin{aligned}(-1)^N &= x_0^2-101y_0^2 \\&= 20\end{aligned}$$

となる。これは等式が成り立っていないので不適である。よって仮定は否定され、 $\textcircled{2}$ は示された。

以上より $1 < x_k+\sqrt{101}y_k < 10+\sqrt{101}$ なる k がただ一つ存在することが示された。

(証明終)

(3)

定義より x_k, y_k は整数である。まず $y_k \neq 0$ を示す。 $y_k = 0$ を(1)の式に代入して整理すると

$$x_n^2=20(-1)^n$$

となるが、これを満たす整数 x_n は存在しないから $y_k \neq 0$ が示された。次に k が偶数だと仮定すると(1)の等式から

$$\begin{aligned}x_k^2-101y_k^2 &= 20 \\&\Leftrightarrow \left(x_k+\sqrt{101}y_k\right)\left(x_k-\sqrt{101}y_k\right)=20\end{aligned}$$

となる。これと(2)の不等式を合わせて

$$\begin{cases}1 < x_k+\sqrt{101}y_k < 10+\sqrt{101} \\20\left(\sqrt{101}-10\right) < x_k-\sqrt{101}y_k < 20\end{cases}$$

である。これより

$$\begin{aligned}1-20 &< \left(x_k+\sqrt{101}y_k\right)-\left(x_k-\sqrt{101}y_k\right) < \left(10+\sqrt{101}\right)-20\left(\sqrt{101}-10\right) \\-19 &< 2\sqrt{101}y_k < 210-19\sqrt{101} \\&\Rightarrow -\frac{19}{2\sqrt{101}} < y_k < \frac{105}{\sqrt{101}}-\frac{19}{2} \\&\Rightarrow -\frac{19}{20} < y_k < \frac{105}{10}-\frac{19}{2}=1 \\&\Rightarrow y_k=0\end{aligned}$$

となる。これは $y_k \neq 0$ より不適。

以上より k が奇数であることが示された。 k が奇数であるから $x_k^2-101y_k^2=-20$ より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}1 < x_k+\sqrt{101}y_k < 10+\sqrt{101} \\-20 < x_k-\sqrt{101}y_k < 200-20\sqrt{101}\end{cases} \\&\Rightarrow 20\sqrt{101}-199 < 2\sqrt{101}y_k < 30+\sqrt{101} \\&\Rightarrow 10-\frac{199}{2\sqrt{101}} < y_k < \frac{15}{\sqrt{101}}+\frac{1}{2} \\&\Rightarrow 10-\frac{199}{20} < y_k < \frac{15}{10}+\frac{1}{2}=2 \\&\Rightarrow 0 < y_k < 2 \\&\Rightarrow y_k=1\end{aligned}$$

である。ここで(1)の等式から

$$\begin{aligned}x_k^2-101 &= -20 \\&\therefore |x_k|=9\end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

〔Ⅳ〕

(1)

方程式(*)の左辺を $F(x)$ とおくと

$$F(4) = -32(\sqrt{2} + 1) < 0$$

$$F(5) = 157 - 40\sqrt{2} > 157 - 40 \cdot 2 > 0$$

となるから中間値の定理より方程式(*)は $(4, 5)$ に解をもつ。

(証明終)

(2)

仮定より

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2 \\ &= p + q + r + 2(\sqrt{pq} + \sqrt{qr} + \sqrt{rp}) \\ &= f + 2(\sqrt{pq} + \sqrt{qr} + \sqrt{rp}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= \left\{ f + 2(\sqrt{pq} + \sqrt{qr} + \sqrt{rp}) \right\}^2 \\ &= f^2 + 4f(\sqrt{pq} + \sqrt{qr} + \sqrt{rp}) + 4(\sqrt{pq} + \sqrt{qr} + \sqrt{rp})^2 \\ &= f^2 + 4f(\sqrt{pq} + \sqrt{qr} + \sqrt{rp}) + 4\{g + 2\sqrt{h}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\} \\ &= 2fx^2 + 8\sqrt{h}x - f^2 + 4g \end{aligned}$$

となるから

$$(A, B, C) = (2f, 8\sqrt{h}, -f^2 + 4g)$$

となる。また(*)と(**)を比較することにより

$$\begin{cases} 2f = 20 \\ 8\sqrt{h} = 8\sqrt{2} \\ -f^2 + 4g = -32 \end{cases}$$

$$\therefore (f, g, h) = (10, 17, 2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (A, B, C) = (2f, 8\sqrt{h}, -f^2 + 4g)$$

$$(f, g, h) = (10, 17, 2)$$

(3)

三次方程式は

$$X^3 - 10X^2 + 17X - 2 = (X - 2)(X^2 - 8X + 1) = 0$$

$$\therefore X = 2, 4 \pm \sqrt{15}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = 2, 4 \pm \sqrt{15}$$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{6}) + \frac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。ここで $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}, 3 < \sqrt{10} < \frac{7}{2}$ からたしかに $4 < \sqrt{2} + \sqrt{10} < 5$ となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{2} + \sqrt{10}$$