

数 学 問 題

(平 成 20 年 度)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
2. 受験番号と氏名は必ず解答用紙の所定の欄(受験番号は2箇所、氏名は1箇所)に記入しなさい。
3. この問題冊子は「06 数学」である。
4. 問題は、次の1～4ページに示されている。
5. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者に申し出ること。
6. 解答は必ず別紙解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。裏面には記入しないこと。
7. 試験時間は120分である。
8. 問題冊子に白紙が入っている。計算等は白紙及び余白を使用してよい。
9. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
10. 問題冊子は持ち帰ること。
11. 試験室に入室してから試験終了までは、退室を認めない。試験中の気分不快や用便等、やむを得ない場合には、手を挙げて監督者を呼び、指示に従うこと。

〔Ⅰ〕 以下の問いに答えよ。ただし解答のみを所定の欄に記入せよ。

(1) 関数

$$y = \log(1 + \tan x) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を微分せよ。

(2) 定積分

$$I = \int_{-2}^2 x^4 \sqrt{4 - x^2} \, dx$$

を求めよ。

(3) $|a| \neq 1$ となる実数 a に対して、関数 $f_a(x)$ を

$$f_a(x) = \frac{1 - ax}{1 + a^2 - 2ax} + \frac{1 + ax}{1 + a^2 + 2ax} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

で定義する。このとき $f_a(x)$ の最大値を求めよ。

〔Ⅱ〕 実数を係数とする多項式 $f(x)$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

をみたせば, $f(x) = 0$ となる x が区間 $(-1, 1)$ に存在することを示せ。

(2) $f(x)$ が

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$$

をみたせば, $f(x) = 0$ となる x が区間 $(-1, 1)$ に 2 個以上存在することを示せ。

〔Ⅲ〕 等式

$$x_0^2 - 101y_0^2 = 20$$

をみたす自然数 x_0, y_0 に対して, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 101 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

(1) 等式

$$x_n^2 - 101y_n^2 = 20(-1)^n$$

を示せ。

(2) 不等式

$$1 < x_k + \sqrt{101}y_k < 10 + \sqrt{101}$$

をみたす $k (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ がただ一つ存在することを示せ。

(3) (2)の k は奇数であり, かつ x_k および y_k は

$$|x_k| = 9, y_k = 1$$

をみたすことを示せ。

〔Ⅳ〕 4次方程式

$$x^4 - 20x^2 - 8\sqrt{2}x + 32 = 0 \quad (*)$$

のある解を見つけない。以下の問いに答えよ。

(1) 方程式(*)は区間(4, 5)に解をもつことを示せ。

(2) (1)での解をオイラー(Leonhard Euler)の方法で求めよう。 p, q, r を正の実数として

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \quad (p, q, r > 0)$$

とおく。まず補助変数 f, g, h

$$f = p + q + r, \quad g = pq + pr + qr, \quad h = pqr$$

を導入する。 x^2, x^4 を計算して,

$$x^4 - Ax^2 - Bx - C = 0 \quad (**)$$

としたとき, A, B, C を f, g, h を用いて表せ。次に(*)と(**)が同じ式と仮定して f, g, h を求めよ。

(3) 等式

$$(X - p)(X - q)(X - r) = X^3 - fX^2 + gX - h$$

と(2)で得られた f, g, h を用いて3次方程式

$$X^3 - fX^2 + gX - h = 0$$

の3つの解 p, q, r を求めよ。

(4) 方程式(*)の解

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

を等式

$$\alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^2 \quad (\alpha, \beta > 0)$$

を用いて簡略化し、それが区間(4, 5)にあることを示せ。