

〔Ⅰ〕

(1)

与えられた 4 次方程式に $x=t+\alpha$ を代入する。

$$a(t+\alpha)^4+b(t+\alpha)^3+c(t+\alpha)^2+d(t+\alpha)+e=0$$

これを整理すると、 t^3 の係数は $4\alpha a+b$ となる。

$$t^4+Ct^2+Dt+E=0$$

の形にするためには、 t^3 の係数が 0 となればよい。

$$4\alpha a+b=0$$

$$\therefore \alpha=-\frac{b}{4a} \left(\because a \neq 0 \right) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

さらに、 $D=0$ となるためには、 t の係数が 0 となればよいから

$$4a\alpha^3+3b\alpha^2+2c\alpha+d=0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立てばよい。①、②より α を消去して整理すると、

$$b^3-4abc+8a^2d=0$$

を得る。

(答) $b^3-4abc+8a^2d=0$

(2)

$$\int_1^{R^2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2} dx$$

を計算する。ここで $x=t^2$ とおくと $dx=2t dt$ となり、積分範囲は次のように変換される。

x	$1 \rightarrow R^2$
t	$1 \rightarrow R$

したがって

$$\begin{aligned} \int_1^{R^2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2} dx &= \int_1^R t e^{-t} dt \\ &= \left[-te^{-t} \right]_1^R - \int_1^R (-e^{-t}) dt \\ &= \left[-(t+1)e^{-t} \right]_1^R \\ &= \frac{2}{e} - \frac{R+1}{e^R} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{e^R} = 0$ を用いると

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{R^2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e} - \frac{R+1}{e^R} \right) = \frac{2}{e}$$

となる。

(答) $\frac{2}{e}$

(3)

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{E_T}{E_S} &= \log_{10} E_T - \log_{10} E_S \\ &= 4.8 + 1.5 \times 8 - (4.8 + 1.5 \times 6.5) \\ &= 2.25 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{E_T}{E_S} &= 10^{\frac{9}{4}} \\ &= \left(10^3 \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\simeq \left(2^{10} \right)^{\frac{3}{4}} \quad \because 10^3 \simeq 2^{10} \\ &= 2^{\frac{15}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^7 \\ &\simeq 1.41 \times 128 \quad \because \sqrt{2} \simeq 1.41 \\ &= 180.48 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{E_T}{E_S} = 180$

〔Ⅱ〕

(1)

題意より

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OQ}| = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 O, P, Q は O を端点とする半直線上に存在するから、 k を正の実数として

$$\overline{OQ} = k\overline{OP} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。①、②より k を求めると、

$$k = \frac{4}{|\overline{OP}|^2} = \frac{4}{x^2 + y^2}$$

となる。これを②に代入すると

$$\overline{OQ} = \frac{4}{x^2 + y^2} \overline{OP} = \frac{4}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q \left(\frac{4x}{x^2 + y^2}, \frac{4y}{x^2 + y^2} \right)$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad Q \left(\frac{4x}{x^2 + y^2}, \frac{4y}{x^2 + y^2} \right)$$

(2)

$Q(X, Y)$ とおく。 P, Q は C に関して対称であるから

$$\overline{OP} = \frac{4}{X^2 + Y^2} \overline{OQ} = \frac{4}{X^2 + Y^2} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4X}{X^2 + Y^2} \\ \frac{4Y}{X^2 + Y^2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (x, y) \neq (0, 0) \\ (X, Y) \neq (0, 0) \end{matrix}$$

となる。これを、与えられた曲線の式に代入すると

$$\left(\frac{4X}{X^2 + Y^2} - 2 \right)^2 + \left(\frac{4Y}{X^2 + Y^2} - 3 \right)^2 = 13 \quad \text{かつ} \quad (X, Y) \neq (0, 0)$$

となるから、整理すると、

$$2X + 3Y = 2$$

を得る。よって Q の軌跡は、直線 $2x + 3y = 2$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{直線 } 2x + 3y = 2$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{より,}$$

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= A^{n-1} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \lambda A^{n-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを繰り返せば,

$$A^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \lambda^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \lambda^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n u + b_n v \\ c_n u + d_n v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda^n u \\ \lambda^n v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$a_n u + b_n v = \lambda^n u \quad \dots\dots ①$$

$$c_n u + d_n v = \lambda^n v \quad \dots\dots ②$$

となる。①+②より

$$(a_n + c_n)u + (b_n + d_n)v = \lambda^n(u + v) \quad \dots\dots ③$$

となる。ここで、 a, b, c, d は全て正の実数であるから、 a_n, b_n, c_n, d_n も全て正の実数となる。

③の両辺を $u (> 0)$ で割ると、 $0 < v \leq u$ と $b_n + d_n > 0$ を用いて

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{v}{u}\right) \lambda^n &= (a_n + c_n) + (b_n + d_n) \frac{v}{u} \\ &\leq a_n + b_n + c_n + d_n \quad \dots\dots ③' \end{aligned}$$

を得る。また、③の両辺を $v (> 0)$ で割ると、 $0 < v \leq u$ と $a_n + c_n > 0$ を用いて

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{u}{v}\right) \lambda^n &= (a_n + c_n) \frac{u}{v} + (b_n + d_n) \\ &\geq a_n + b_n + c_n + d_n \quad \dots\dots ③'' \end{aligned}$$

を得る。③', ③''より

$$\left(1 + \frac{v}{u}\right) \lambda^n \leq a_n + b_n + c_n + d_n \leq \left(1 + \frac{u}{v}\right) \lambda^n$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + bc_n & ab_n + bd_n \\ ca_n + dc_n & cb_n + dd_n \end{pmatrix} \\ A^{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より,

$$a_{n+1} = aa_n + bc_n \quad \dots\dots ④$$

$$d_{n+1} = cb_n + dd_n \quad \dots\dots ⑤$$

が成り立つ。④, ⑤を用いて、示す不等式の(右辺)-(左辺)を計算すると

$$\begin{aligned} M(a_{n+1} + d_{n+1}) - a_n - b_n - c_n - d_n &= M(aa_n + bc_n + cb_n + dd_n) - a_n - b_n - c_n - d_n \\ &= (Ma - 1)a_n + (Mc - 1)b_n + (Mb - 1)c_n + (Md - 1)d_n \end{aligned}$$

となる。ここで、 $1 + \frac{1}{b} > 1$, $1 + \frac{1}{c} > 1$ より $M > 1$ であり、さらに $a \geq 1$, $d \geq 1$ であるから

$$Ma > 1 \quad \dots\dots ⑥$$

$$Md > 1 \quad \dots\dots ⑦$$

となる。また、 $b \geq c$ のときは $M = 1 + \frac{1}{c}$ であるから

$$Mc = c \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 1 + c > 1$$

$$Mb \geq Mc > 1$$

となり、同様に $b < c$ のときも $Mc > 1$, $Mb > 1$ が成り立つ。よって常に

$$Mc > 1 \quad \dots\dots ⑧$$

$$Mb > 1 \quad \dots\dots ⑨$$

が成り立つ。⑥, ⑦, ⑧, ⑨と、 $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$ であることを用いると

$$\begin{aligned} (Ma - 1)a_n + (Mc - 1)b_n + (Mb - 1)c_n + (Md - 1)d_n &> 0 \\ \therefore a_n + b_n + c_n + d_n &< M(a_{n+1} + d_{n+1}) \end{aligned}$$

よって、題意は示された。

(証明終)

(3)

(1), (2)の結論より、 $n \geq 2$ のとき次の2式が成り立つ。

$$M(a_n + d_n) > a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} \geq \left(1 + \frac{v}{u}\right) \lambda^{n-1} \quad \dots\dots ⑩$$

$$a_n + d_n < a_n + b_n + c_n + d_n \leq \left(1 + \frac{u}{v}\right) \lambda^n \quad \dots\dots ⑪$$

⑩, ⑪より、 $M > 1$ であることを用いると

$$\frac{1}{M} \left(1 + \frac{v}{u}\right) \lambda^{n-1} < a_n + d_n < \left(1 + \frac{u}{v}\right) \lambda^n$$

が成り立つ。さらに、自然対数をとって $\frac{1}{n}$ をかけても大小関係は保たれるから

$$\frac{1}{n} \log \left\{ \frac{1}{M} \left(1 + \frac{v}{u}\right) \right\} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \log \lambda < \frac{1}{n} \log(a_n + d_n) < \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{u}{v}\right) + \log \lambda$$

となる。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \log \left\{ \frac{1}{M} \left(1 + \frac{v}{u}\right) \right\} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \log \lambda \right] = \log \lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{u}{v}\right) + \log \lambda \right] = \log \lambda$$

であることから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + d_n) = \log \lambda$$

を得る。

(答) $\log \lambda$

〔Ⅳ〕

(1)

$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと,

$$f'(x) = e^x - 1$$

となる。 $x \geq 0$ において $f'(x) \geq 0$ となり, $f(x)$ は単調増加するから,

$$f(x) \geq f(0) = 0$$

となる。よって, $0 \leq x \leq a$ の範囲で

$$e^x \geq 1+x \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また, $g(x) = \frac{e^a - 1}{a}x + 1 - e^x$ とおくと,

$$g'(x) = -e^x < 0$$

より, $g(x)$ は上に凸である。 $g(0) = 0, g(a) = 0$ と合わせると, $0 \leq x \leq a$ の範囲で

$$g(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^a - 1}{a}x + 1 \geq e^x \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, $0 \leq x \leq a$ の範囲で

$$1+x \leq e^x \leq \frac{e^a - 1}{a}x + 1$$

が成り立ち, 題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)で示した不等式を, x について 0 から a まで積分する。

$0 < x < a$ では $1+x < e^x < \frac{e^a - 1}{a}x + 1$ なので, 等号を外してよいことに注意すると

$$\int_0^a (1+x) dx < \int_0^a e^x dx < \int_0^a \left(\frac{e^a - 1}{a}x + 1 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a < \left[e^x \right]_0^a < \left[\frac{e^a - 1}{2a}x^2 + x \right]_0^a$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{2}a^2 < e^a - 1 < \frac{e^a - 1}{2}a + a$$

$$\therefore 1 + a + \frac{1}{2}a^2 < e^a < 1 + \frac{a}{2}(e^a + 1)$$

よって, 題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)で示した不等式に $a = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} < e^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{1}{2}} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{8} < e^{\frac{1}{2}} < \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{169}{64} < e < \frac{25}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2.6406\cdots < e < 2.7777\cdots$$

となる。これより,

$$2.64 < e < 2.78$$

が示された。

(証明終)