

【Ⅰ】

〔解答〕

- (1) ① $\frac{4\alpha^3}{4\alpha^2+1}$
 (2) ② $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$
 (3) ③ $e^{2ax}(x+at)^n$
 (4) ④ $f'(x)=\cos x-\sin x$ ⑤ $f(0)=0$ ⑥ $f(x)=\sin x+\cos x-1$

〔解説〕

- (1)
 $f(x)=x\sin^2 x$ より、
 $f'(x)=\sin^2 x+x\cdot 2\sin x\cdot \cos x$

であるから、 $x=\frac{\pi}{2}$ のとき、

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

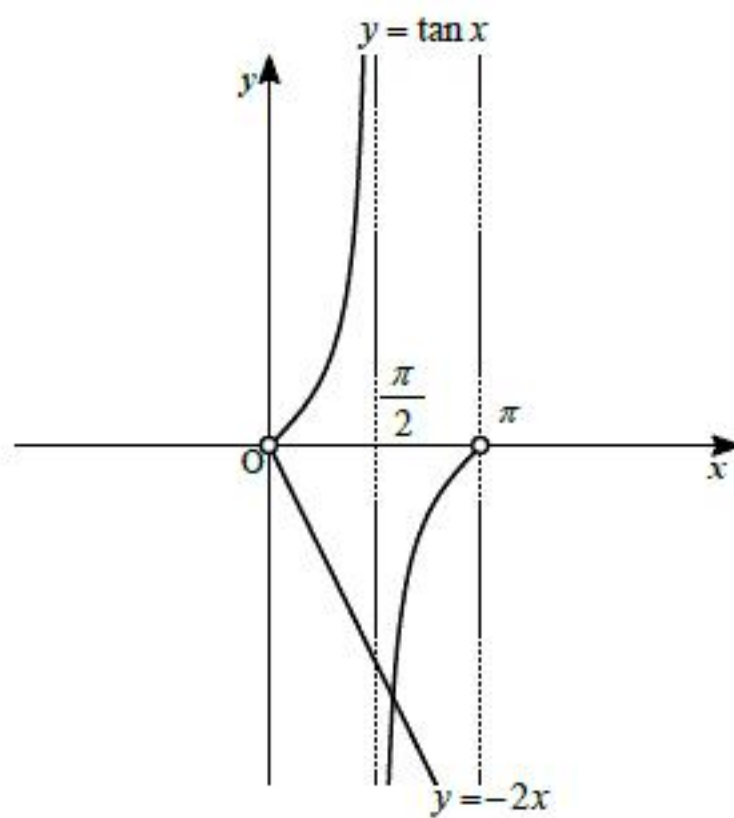
となる。したがって、

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$$

である。 $x\neq\frac{\pi}{2}$ のとき、

$$f'(x)=\sin x\cos x(\tan x+2x)$$

と変形できる。ここで、 $y=-2x$, $y=\tan x$ のグラフを $0<x<\pi$ の範囲で描くと、次のようになる。



$y=-2x$, $y=\tan x$ の $0<x<\pi$ における交点の x 座標を β とおく。 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\beta<x<\pi$ におい

ては $-2x<\tan x\Leftrightarrow \tan x+2x>0$ であり、 $\frac{\pi}{2}<x<\beta$ においては $-2x>\tan x\Leftrightarrow \tan x+2x<0$ で

ある。よって、次のような表が書ける。

$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\beta$	$\beta<x<\pi$
$\sin x\cos x>0$	$\sin x\cos x<0$	$\sin x\cos x<0$
$\tan x+2x>0$	$\tan x+2x<0$	$\tan x+2x>0$
$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$

よって、次のような増減表が書ける。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	0

したがって、 $f(x)$ は、 $0\leq x\leq\pi$ の範囲では、 $x=\beta$ で最大値をとる。したがって、 $\alpha=\beta$

である。このとき、

$$\begin{aligned}\tan\alpha+2\alpha&=0 \\ \Leftrightarrow \tan\alpha&=-2\alpha\end{aligned}\quad \cdots\cdots ①$$

となる。

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\alpha\sin^2\alpha \\ &=\alpha(1-\cos^2\alpha) \\ &=\alpha\left(1-\frac{1}{\tan^2\alpha+1}\right) \\ &=\frac{\alpha\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}\end{aligned}$$

であるから、上式に①を代入すると、

$$f(\alpha)=\frac{\alpha\cdot(-2\alpha)^2}{(-2\alpha)^2+1}=\frac{4\alpha^3}{4\alpha^2+1}$$

と求まる。

(2)

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 \\ &=a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4 \\ &=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2 \\ &=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\} \\ &=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\end{aligned}$$

である。

(3)

$f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ k 回 x で微分すると、

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x)&=(2a)^k e^{2ax} \\ g^{(k)}(x)&=\begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & (0\leq k\leq n \text{ のとき}) \\ 0 & (n<k\leq N \text{ のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

であるから、これを与式に代入すると、

$$\begin{aligned}(f^*, g)(x)&=\sum_{k=0}^N \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &=\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{2^k k!} \cdot (2a)^k \cdot e^{2ax} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &=e^{2ax} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (at)^k \cdot x^{n-k} \\ &=e^{2ax} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (at)^k x^{n-k} \\ &=e^{2ax} (x+at)^n\end{aligned}$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned}f(x)+\int_0^x f(t)e^{x-t}dt&=\sin x \\ \Leftrightarrow f(x)+e^x\int_0^x f(t)e^{-t}dt&=\sin x\end{aligned}\quad \cdots\cdots ①$$

と変形できる。前式の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned}f'(x)+e^x\int_0^x f(t)e^{-t}dt+e^x\cdot f(x)\cdot e^{-x}&=\cos x \\ \Leftrightarrow f'(x)+e^x\int_0^x f(t)e^{-t}dt+f(x)&=\cos x\end{aligned}\quad \cdots\cdots ②$$

となるので、①、②より、

$$\begin{aligned}f'(x)+\sin x&=\cos x \\ \Leftrightarrow f'(x)&=\cos x-\sin x\end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)=\sin x+\cos x+C$ である。ただし、 C は定数である。また、①に $x=0$ を

代入すると、

$$f(0)=0$$

となる。したがって、

$$f(x)=\sin x+\cos x-1$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$E-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (E-A)^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{36}{13} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) (E-A)^{-1} = \frac{36}{13} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{x^2 + y^2}$$

である。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから,

$$r = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{5}{6}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{5}{6}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

この式を変形して,

$$\begin{pmatrix} x_n - \alpha \\ y_n - \beta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} - \alpha \\ y_{n-1} - \beta \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるような (α, β) を求める。②を変形して,

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + (E-A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。この式と①を比較すると,

$$\begin{aligned} (E-A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= (E-A)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。(1)の結果を代入すると,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{36}{13} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{36}{13} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と求まる。これを②に代入すると,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n - 6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} - 6 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。(2)より,

$$\sqrt{x_n^2 + (y_n - 6)^2} = \frac{5}{6} \sqrt{x_{n-1}^2 + (y_{n-1} - 6)^2} = \dots = \left(\frac{5}{6}\right)^n \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 6)^2}$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n^2 + (y_n - 6)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 6)^2} = 0$$

である。 $x_n^2, (y_n - 6)^2 \geq 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - 6 &= 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 6 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 6$$

〔Ⅲ〕

(1)

PQ の長さは,

$$2\pi a \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{3}a$$

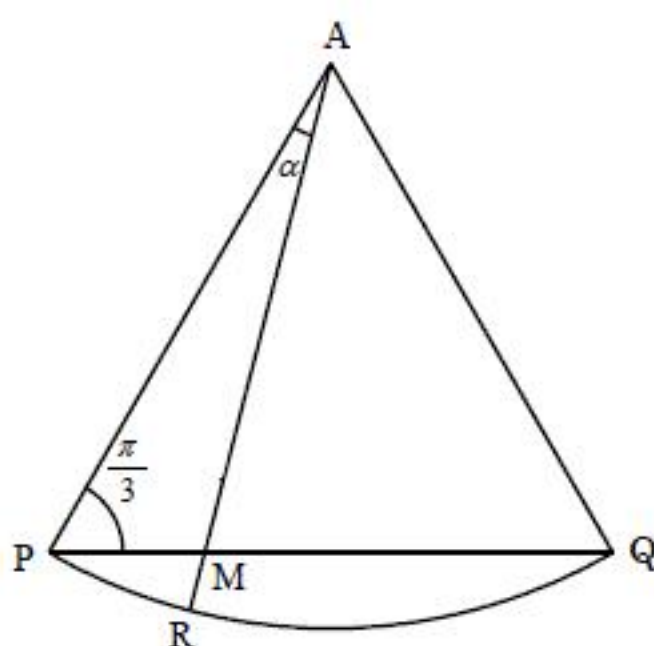
である。PQ が円 S の円周となっているので,

$$\begin{aligned} 2\pi b &= \frac{\pi}{3}a \\ \therefore b &= \frac{1}{6}a \end{aligned}$$

と求まる。次に PR の長さを a, θ を用いて表すと,

$$2\pi b \cdot \frac{\theta}{2\pi} = b\theta = \frac{1}{6}a\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

である。次に側面を展開すると、展開図は次図のとおりである。



したがって、 $\angle PAR = \alpha$ とおくと、PR を a, α を用いて表すと,

$$2\pi a \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = a\alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①, ②より,

$$\alpha = \frac{1}{6}\theta \quad \dots \textcircled{3}$$

と求まる。 $\angle AMP = \frac{2}{3}\pi - \alpha$ であるから、 $\triangle APM$ について正弦定理より,

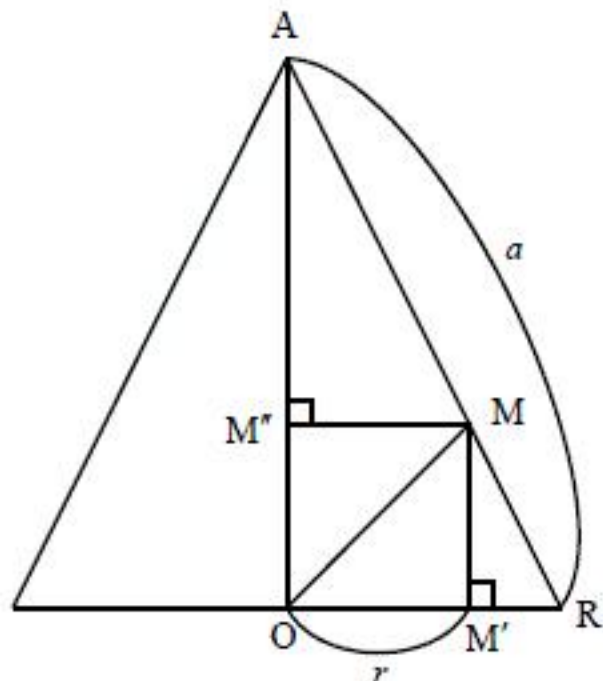
$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right)} &= \frac{AM}{\sin\frac{\pi}{3}} \\ \Leftrightarrow AM &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right)} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) b = \frac{1}{6}a, AM = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)}$$

(2)

円錐を A, O, M を通る面で切断すると断面図は次のとおりである。(ただし、点 M から xy 平面と z 軸におろした垂線の足をそれぞれ M', M'' とする)



OR = b より,

$$\cos\angle ORA = \frac{b}{a} = \frac{1}{6}$$

である。また、前図より、 $\angle ORA = \angle AMM''$ だから,

$$\cos\angle AMM'' = \frac{1}{6}$$

である。 $r = OM' = MM''$ であるから,

$$r = AM \cos\angle AMM'' = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}a}{12\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)}$$

と求まる。したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{r(\theta)\}^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{3}a}{12\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)} \right\}^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{96} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

ここで、 $t = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta$ とおくと,

$$dt = -\frac{1}{6}d\theta$$

θ	$0 \rightarrow 2\pi$
t	$\frac{2}{3}\pi \rightarrow \frac{\pi}{3}$

となるので,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)} &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 t} \cdot (-6dt) \\ &= 6 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} \\ &= 6 \left[-\frac{\cos t}{\sin t} \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。したがって,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{6}\theta\right)} = 4\sqrt{3}$$

である。これを④に代入すると,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{r(\theta)\}^2 d\theta = \frac{a^2}{96} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{24} a^2$$

となる。

$$(\text{答}) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{r(\theta)\}^2 d\theta = \frac{\sqrt{3}}{24} a^2$$