

【I】

(1)

$$f(x)=\log\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$$

を x で微分していくと

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}-x}\left\{\frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x-1\right\}=-\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=x\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x)=\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}+x\left(-\frac{3}{2}\right)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=\left(a^2-2x^2\right)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

となる。よって、求める多項式は

$$\begin{aligned} & f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ & =\log a-\frac{1}{a}x+\frac{1}{6a^3}x^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \log a-\frac{1}{a}x+\frac{1}{6a^3}x^3$$

(2)

(2-i)

$y=\sin x$ のとき $y'=\cos x$ であるから、点 $P(a, \sin a)$ における C の法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{\cos a}(x-a)+\sin a$$

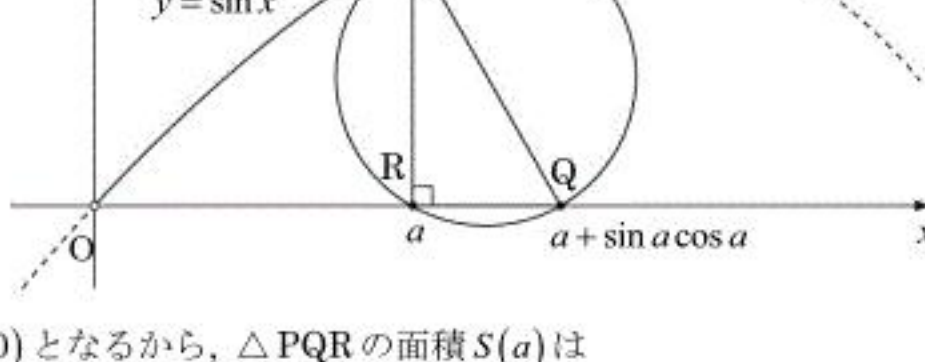
である ($0 < a < \frac{\pi}{2}$ より $\cos a \neq 0$)。よって、この法線と x 軸との交点 Q の x 座標は

$$0=-\frac{1}{\cos a}(x-a)+\sin a$$

$$\therefore x=a+\sin a \cos a$$

となるから、点 Q の座標は $Q(a+\sin a \cos a, 0)$ である。

ここで、 $\triangle PQR$ について考えると、線分 PQ が円の直径であることから、 $\angle PRQ=90^\circ$ となり、下図のようになる。



よって、 $R(a, 0)$ となるから、 $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \cdot PR \cdot QR \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin a \cdot \sin a \cos a \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 a \cos a \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(a)=\frac{1}{2} \sin ^2 a \cos a$$

(2-ii)

$\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \sin ^2 a \cos a \\ &= \frac{1}{2} \left(1-\cos ^2 a\right) \cos a \end{aligned}$$

のように変形できる。ここで、 $t=\cos a, f(t)=S(a)$ とおくと、 $0 < t < 1$ であり、

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-t^2\right) t=\frac{1}{2}\left(t-t^3\right)$$

となる。これを t で微分すると

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left(1-3 t^2\right)$$

となるから、 $f(t)$ の増減は下表のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$f'(t)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(t)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

よって、 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(t)$ は最大値 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$ をとる。 $S(a)=f(t)$ より、求める最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{9}$$

(3)

(3-i)

第 m 群の最終項までの項数を b_m と表すことにすると、

$$\begin{aligned} b_m &=1+2+3+\cdots+m \\ &=\frac{1}{2} m(m+1) \end{aligned}$$

である。

また、第 m 群に属する分数すべてについて

$$(\text{分子})+(\text{分母})=m+1$$

が成り立つので、 $\frac{q}{p}$ は第 $p+q-1$ 群の q 番目の分数であることがわかる。

よって、

$$b_{p+q-1}+q=\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q$$

より、

$$\frac{q}{p} \text{ は第 } \frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q \text{ 項}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{第 } \frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q \text{ 項}$$

(3-ii)

第 100 項 a_{100} が第 l 群に属するとき、

$$b_{l-1} < 100 \leq b_l$$

が成り立つ。ここで、

$$b_{13}=\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14=91$$

$$b_{14}=\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15=105$$

より、 $l=14$ 、つまり a_{100} が第 14 群に属することがわかる。

$$100-91=9$$

より、 a_{100} は第 14 群の 9 番目の項であるから、

$$a_{100}=\frac{9}{14-9+1}=\frac{9}{6}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_{100}=\frac{9}{6}$$

(4)

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より

$$A\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり、 $3 \cdot 1-1 \cdot 2=1 \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} A &=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} A^2 &=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^2 \\ &=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=E \end{aligned}$$

である (E は単位行列) から、

$$n \text{ が奇数のとき } A^n=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$n \text{ が偶数のとき } A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$n \text{ が奇数のとき } A^n\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n \text{ が偶数のとき } A^n\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。

(答)

$$A^n\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

(5)

$$AB=AC=a$$

とおくと、

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{PC}{AC}=\frac{1}{2a}$$

と表せる。

$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから $\angle ABC=\angle ACB$ が成り立ち、また、直線 BQ, CR は

$\angle B, \angle C$ の二等分線であることから $\angle ABQ=\angle CBQ, \angle ACR=\angle BCR$ が成り立つ。よって、

$$\angle ABQ=\angle CBQ=\angle ACR=\angle BCR=\frac{1}{4}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{5}$$

だとわかる。

このとき、 $\triangle CRB$ と $\triangle QAB$ はそれぞれ二等辺三角形となることから、

$$RA=RC=BC=1$$

$$\therefore RB=a-1$$

である。また、

$$\triangle CRB \sim \triangle ABC$$

となることから、

$$RB=BC \cdot \frac{CB}{AC}=1 \cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

とも表せる。よって、

$$a-1=\frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow a^2-a-1=0$$

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because a>0)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) &=\frac{1}{2a} \\ &=\frac{1}{1+\sqrt{5}} \\ &=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

〔Ⅱ〕

(1)

点Qは辺CDを $t:1-t$ に内分するから

$$\overrightarrow{BQ} = (1-t)\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}$$

と表せる。ここで、

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

より、求める内積は

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BQ} \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \{(1-t)\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}\} \\ &= (1-t)\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= (1-t)\frac{a^2}{2} + t \cdot \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} &= -\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{QB} &= -\overrightarrow{BQ} \end{aligned}$$

であるから、(1)より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} &= |\overrightarrow{BQ}|^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BQ} \\ &= |\overrightarrow{BQ}|^2 - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{2} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BQ}|^2 &= \{(1-t)\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}\} \cdot \{(1-t)\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}\} \\ &= (1-t)^2 |\overrightarrow{BC}|^2 + t^2 |\overrightarrow{BD}|^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= (1-t)^2 a^2 + t^2 a^2 + 2t(1-t)\frac{a^2}{2} \\ &= (t^2 - t + 1)a^2 \end{aligned}$$

となり、求める内積は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} &= (t^2 - t + 1)a^2 - \frac{a^2}{2} \\ &= \left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)a^2 \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)a^2$$

(3)

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} + (1-t)\overrightarrow{BA}$$

と表せるから、(1), (2)より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QP}|^2 &= \{\overrightarrow{QB} + (1-t)\overrightarrow{BA}\} \cdot \{\overrightarrow{QB} + (1-t)\overrightarrow{BA}\} \\ &= |\overrightarrow{QB}|^2 + (1-t)^2 |\overrightarrow{BA}|^2 + 2(1-t)\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{QB} \\ &= (t^2 - t + 1)a^2 + (1-t)^2 a^2 + 2(1-t) \cdot \left(-\frac{a^2}{2}\right) \\ &= (2t^2 - 2t + 1)a^2 \end{aligned}$$

と計算できる。よって、 $\overrightarrow{QP}$ の長さは

$$|\overrightarrow{QP}| = a\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$

〔Ⅲ〕

(1)

[1] $\alpha = \beta$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^R \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} dx \\ &= \int_0^R \frac{1}{(1+\alpha x)^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\alpha} (1+\alpha x)^{-1} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{1+\alpha R} \right) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+\alpha R} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(= \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

となる。

[2] $\alpha \neq \beta$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^R \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} dx \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \int_0^R \left(\frac{\alpha}{1+\alpha x} - \frac{\beta}{1+\beta x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\log(1+\alpha x) - \log(1+\beta x) \right]_0^R \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \log \frac{1+\alpha R}{1+\beta R} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \log \frac{\frac{1}{R} + \alpha}{\frac{1}{R} + \beta} \end{aligned}$$

のように計算できることから,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} dx \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\log \frac{\frac{1}{R} + \alpha}{\frac{1}{R} + \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\log \alpha - \log \beta) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より, 求める積分は

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(= \frac{1}{\beta} \right) & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \\ \frac{1}{\alpha - \beta} (\log \alpha - \log \beta) & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(答)

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(= \frac{1}{\beta} \right) & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \\ \frac{1}{\alpha - \beta} (\log \alpha - \log \beta) & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

部分分数分解をするために

$$\frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)} = \frac{k}{(1+ax)(1+bx)} + \frac{l}{(1+bx)(1+cx)}$$

とおく (k, l は定数)。両辺に $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$ をかけると

$$1 = k(1+cx) + l(1+ax)$$

という恒等式が得られるので, $x=0, 1$ を代入すると

$$1 = k + l$$

$$1 = k(1+c) + l(1+a)$$

$$\therefore k = \frac{a}{a-c}, l = -\frac{c}{a-c} \quad (\because a \neq c)$$

と求まる。よって,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)} dx \\ &= \frac{a}{a-c} \int_0^\infty \frac{1}{(1+ax)(1+bx)} dx - \frac{c}{a-c} \int_0^\infty \frac{1}{(1+bx)(1+cx)} dx \end{aligned}$$

と表されることになる。 a, b, c は相異なる正の定数なので, これに(1)の結果を適用すると,

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{a-c} \cdot \frac{1}{a-b} (\log a - \log b) - \frac{c}{a-c} \cdot \frac{1}{b-c} (\log b - \log c) \\ &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} \log a + \frac{b}{(b-c)(b-a)} \log b + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \log c \end{aligned}$$

となる。よって,

$$A = \frac{a}{(a-b)(a-c)}$$

$$B = \frac{b}{(b-c)(b-a)}$$

$$C = \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

である。

$$(答) \quad A = \frac{a}{(a-b)(a-c)}, B = \frac{b}{(b-c)(b-a)}, C = \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$