

〔Ⅰ〕

(1)

与えられた関数を微分すると、

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{x(a+x)}-a\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)\right\}' &= \frac{2x+a}{2\sqrt{x(a+x)}}-\frac{a\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}} \\ &= \frac{2x+a}{2\sqrt{x(a+x)}}-\frac{a}{2\sqrt{x(a+x)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x(a+x)}} \\ &= \sqrt{\frac{x}{x+a}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \sqrt{\frac{x}{x+a}}$$

(2)

$x > 0$ のとき、

$$\sqrt{x(bx+c)} = \frac{1}{2}(x^2)' \sqrt{b+\frac{c}{x}}$$

であるから、部分積分を用いて、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x(bx+c)} dx &= \frac{1}{2}x^2 \sqrt{b+\frac{c}{x}} - \int \frac{1}{2}x^2 \left(\sqrt{b+\frac{c}{x}}\right)' dx \\ &= \frac{1}{2}x \sqrt{x(bx+c)} - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{-\frac{c}{x^2}}{2\sqrt{b+\frac{c}{x}}} dx \\ &= \frac{1}{2}x \sqrt{x(bx+c)} + \frac{c}{4} \int \sqrt{\frac{x}{bx+c}} dx\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$x > 0$ であるとき、(2)より、

$$\int \sqrt{x(2x+1)} dx = \frac{1}{2}x \sqrt{x(2x+1)} + \frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{x}{2x+1}} dx \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、(1)より、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x}{2x+1}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{x}{x+\frac{1}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{x\left(\frac{1}{2}+x\right)} - \frac{1}{2} \log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{2}}\right) + C \right\} \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

であるから、①とあわせて、

$$\int \sqrt{x(2x+1)} dx = \frac{1}{2}x \sqrt{x(2x+1)} + \frac{1}{8} \sqrt{x(2x+1)} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{2}}\right) + C_1$$

を得る。ただし、 C_1 は $C_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}C$ を満たす積分定数である。

$$(\text{答}) \frac{1}{2}x \sqrt{x(2x+1)} + \frac{1}{8} \sqrt{x(2x+1)} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{2}}\right) + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

【Ⅱ】

(1)

ボールを箱に入れ終わった直後は、必ず手元のカードはすべて袋の中に戻っていることに注意する。 $P_3(1)$ は、2個目のボールを箱に入れ終わった状態からカードを引いて、そのカードの番号が空の箱の番号となる確率であるから、

$$\begin{aligned} P_3(1) &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $P_3(2)$ は、1回目に空でない箱の番号が書かれているカードを取り出し、2回目に空の箱の番号が書かれているカードを取り出す確率であるから、

$$\begin{aligned} P_3(2) &= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。 $Q_3(2)$ は、1回目でも2回目でも空の箱の番号が書かれているカードを取り出していない確率であるから、

$$\begin{aligned} Q_3(2) &= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_3(1) = \frac{1}{2}, \quad P_3(2) = \frac{1}{3}, \quad Q_3(2) = \frac{1}{6}$$

(2)

$k-1$ 個目のボールを箱に入れた直後、ボールの入っている箱の数は $k-1$ 個であるから、次の k 個目のボールを入れるまでに取り出すカードの枚数の最大値は、

$$k-1+1=k$$

である。よって、 i 枚のカードを取り出してもまだ次の箱にボールを入れていない事象は、次の箱にボールを入れるまでに $i+1$ 枚から k 枚のカードを取り出す事象と一致する。したがって、

$$Q_k(i) = P_k(i+1) + P_k(i+2) + \cdots + P_k(k)$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_k(i+1) + P_k(i+2) + \cdots + P_k(k)$$

(3)

$k-1$ 個目のボールを箱に入れた後、次の k 個目のボールを入れるまでに袋から取り出すカードの枚数の期待値は、

$$E_k = \sum_{i=1}^k iP_k(i) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。一方、(2)より、

$$\begin{aligned} Q_k(0) + Q_k(1) + \cdots + Q_k(k-1) &= \{P_k(1) + P_k(2) + \cdots + P_k(k)\} + \{P_k(2) + \cdots + P_k(k)\} + \cdots + P_k(k) \\ &= P_k(1) + 2P_k(2) + \cdots + kP_k(k) \\ &= \sum_{i=1}^k iP_k(i) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。したがって、①、②より、

$$E_k = Q_k(0) + Q_k(1) + \cdots + Q_k(k-1)$$

である。

(証明終)

(4)

不等式 $E_k \leq \frac{n}{n-k+1}$ が成立することを示す。

[1] $k=1$ のとき

(3)の結果より、 $E_1 = Q_1(0) = 1$ であり、また、 $\frac{n}{n-1+1} = 1$ であるから、 $E_k = \frac{n}{n-k+1}$ が成り立つ。

[2] $k \geq 2$ のとき

$1 \leq i \leq k-1$ なる i に対し、 $Q_k(i)$ は、 n 枚のカードのうち $k-1$ 枚ある空の箱の番号が書かれているカードを i 回取り出し続ける確率であるから、

$$\begin{aligned} Q_k(i) &= \frac{k-1}{n} \cdot \frac{k-2}{n-1} \cdots \frac{k-1-(i-1)}{n-(i-1)} \\ &= \frac{k-1}{n} \cdot \frac{k-2}{n-1} \cdots \frac{k-i}{n-i+1} \end{aligned}$$

となる。よって、(3)より

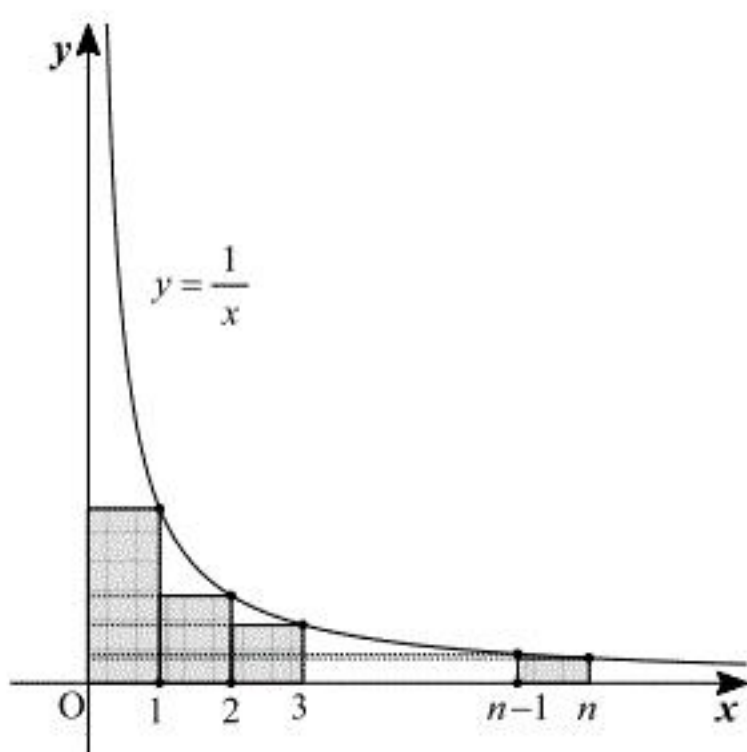
$$\begin{aligned} E_k &= Q_k(0) + Q_k(1) + \cdots + Q_k(k-1) \\ &= 1 + \frac{k-1}{n} + \frac{k-1}{n} \cdot \frac{k-2}{n-1} + \cdots + \frac{k-1}{n} \cdot \frac{k-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-k+2} \\ &\leq 1 + \frac{k-1}{n} + \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \quad (\because \frac{k-i}{n-i+1} \leq \frac{k-1}{n} \quad (i=1, 2, \dots, k-1)) \\ &= \frac{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^k}{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)} \\ &\leq \frac{1}{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)} \\ &= \frac{n}{n-k+1} \end{aligned}$$

となる。

したがって、[1], [2]より、題意は示された。

(証明終)

(5)



前図と、(4)より、

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + \cdots + E_n &\leq \frac{n}{n-1+1} + \frac{n}{n-2+1} + \cdots + \frac{n}{n-n+1} \\ &= n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq n \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) \\ &= n \left(1 + [\log x]_1^n \right) \\ &= n + n \log n \end{aligned}$$

となる。

(証明終)