

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- (1) $\frac{1}{6}A^3-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{3}C$
- (2) $\frac{1}{2n+1}(2^{2n}-1)$
- (3) $\frac{336}{625}$
- (4) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$
- (5) $2\log(\sqrt{2}+1)$

〔解説〕

- (1) まず、
$$\begin{aligned} B &= a^2+b^2+c^2 \\ &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= A^2-2(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

より、
$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}(A^2-B)$$

である。よって、
$$\begin{aligned} C-3abc &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\} \\ &= A\left\{B-\frac{1}{2}(A^2-B)\right\} \\ &= \frac{1}{2}(3AB-A^3) \end{aligned}$$

であるから、
$$\begin{aligned} abc &= \frac{1}{3}\left\{C-\frac{1}{2}(3AB-A^3)\right\} \\ &= \frac{1}{6}A^3-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{3}C \end{aligned}$$

を得る。

- (2) 与式を変形して、
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}C_{2k+1}}{2k+2} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}\cdot\frac{(2n)!}{(2k+1)!\{2n-(2k+1)\}!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2k+2)!\{2n+1-(2k+2)\}!} \\ &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n+1}C_{2k+2} \\ &= \frac{1}{2n+1}\sum_{l=1}^n{}_{2n+1}C_{2l} \end{aligned}$$

を得る。また、二項定理より、
$$\begin{aligned} (1+1)^{2n+1} &= {}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}+{}_{2n+1}C_{2n+1} \\ (1-1)^{2n+1} &= {}_{2n+1}C_0-{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2-\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}-{}_{2n+1}C_{2n+1} \end{aligned}$$

であるから、
$$\begin{aligned} (1+1)^{2n+1}+(1-1)^{2n+1} &= 2({}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}) \\ \therefore \sum_{l=1}^n{}_{2n+1}C_{2l} &= 2^{2n} \end{aligned}$$

を得る。よって、
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}C_{2k+1}}{2k+2} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{l=1}^n{}_{2n+1}C_{2l} \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{l=0}^n{}_{2n+1}C_{2l}-{}_{2n+1}C_0\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}(2^{2n}-1) \end{aligned}$$

となる。

- (3) 題意の条件より、それぞれの文字が表示される確率は次表の通りである。

X	Y	Z
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

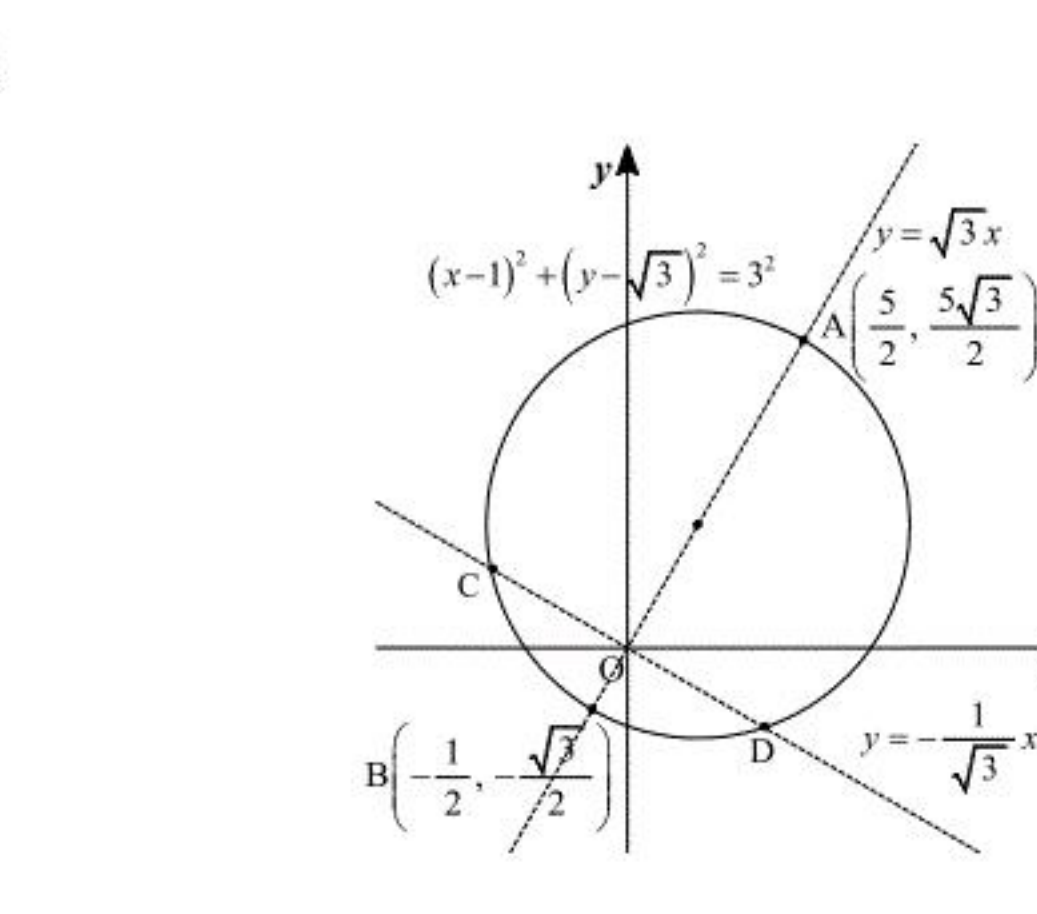
以下 X, Y, Z がそれぞれ x, y, z 回表示される事象を (x, y, z) で表す。 $x+y+z=5$ かつ $x, y, z \geq 1$ となるような確率を求めればよい。

- [1] $(3, 1, 1)$ または $(1, 3, 1)$ または $(1, 1, 3)$ となる確率
どの場合も表示のされ方が $\frac{5!}{3!1!1!}$ 通りあることに注意すると、求める確率は、
$$\frac{5!}{3!1!1!}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}=\frac{144}{625}$$
となる。

- [2] $(2, 2, 1)$ または $(1, 2, 2)$ または $(2, 1, 2)$ となる確率
どの場合も表示のされ方が $\frac{5!}{2!2!1!}$ 通りあることに注意すると、求める確率は、
$$\frac{5!}{2!2!1!}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}=\frac{192}{625}$$
となる。

以上、[1], [2]より、求める確率は、
$$\frac{144}{625}+\frac{192}{625}=\frac{336}{625}$$

となる。



上図のように点を定め、求める正方行列 A が表す 1 次変換を f とする。また、 A, B, C, D がそれぞれ f によって移る点を A', B', C', D' とする。まず、 f は線形変換であるから、

$$\overrightarrow{OA'} = f(\overrightarrow{OA}) = f(-5\overrightarrow{OB}) = -5f(\overrightarrow{OB}) = -5\overrightarrow{OB'}$$

である。ここで、 A', B' は円 C 上にあるから、図より $A' = A, B' = B$ であることがわかる。また、

$$\overrightarrow{OC'} = f(\overrightarrow{OC}) = f(-\overrightarrow{OD}) = -f(\overrightarrow{OD}) = -\overrightarrow{OD'}$$

であるから、図より $C' = C, D' = D$ または $C' = D, D' = C$ であることがわかる。いずれにせよ、 $\overrightarrow{0}$ でなく平行でない 2 つのベクトルの先行が決まっているから、1 次変換 f は一意に定まる。

- [1] $C' = C, D' = D$ の場合
恒等変換 $f=id$ は条件を満たし、このとき $A=I$ (単位行列)となるが、これは題意より不適である。
- [2] $C' = D, D' = C$ の場合
直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する折り返し変換は条件を満たすことがわかる。このとき、1 次変換 f の表現行列 A は、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。
以上、[1], [2]より、求める行列 A は、

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

- (5)
$$t=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
- とおくと、
$$\frac{dt}{dx}=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり、 x と t の対応関係は、

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\rightarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

となるから、与えられた定積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sin x+\cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\log(1+t) - \log(1-t) \right] \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\log \frac{1+t}{1-t} \right] \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 2\log(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

与えられた式を計算することによって、

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - a^2)^2 \\ &= \frac{d}{dx} 2x \cdot 2(x^2 - a^2) \\ &= 12x^2 - 4a^2 \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} P_2(-a) &= 12(-a)^2 - 4a^2 \\ &= 8a^2 \end{aligned}$$

であることがわかる。また、

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - a^2)^3 \\ &= \frac{d^2}{dx^2} 2x \cdot 3(x^2 - a^2)^2 \\ &= \frac{d^2}{dx^2} (6x^5 - 12a^2x^3 + 6a^4x) \\ &= \frac{d}{dx} (30x^4 - 36a^2x^2 + 6a^4) \\ &= 120x^3 - 72a^2x \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} P_3(-a) &= 120(-a)^3 - 72a^2(-a) \\ &= -48a^3 \end{aligned}$$

となることがわかる。

$$(\text{答}) \quad P_2(-a) = 8a^2, \quad P_3(-a) = -48a^3$$

(2)

数学的帰納法を利用して、ライプニッツの公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき題意が成立することを示す

積の微分公式より、

$$\begin{aligned} (uv)^{(1)} &= u^{(1)}v + uv^{(1)} \\ &= {}_1C_0 u^{(1)}v + {}_1C_1 uv^{(1)} \end{aligned}$$

であるから、ライプニッツの公式は成り立つ。

[2] $n=m$ でライプニッツの公式が成り立つと仮定する

仮定より、

$$\begin{aligned} (uv)^{(m+1)} &= \left\{ (uv)^{(m)} \right\}' \\ &= \left(\sum_{k=0}^m {}_mC_k u^{(m-k)} v^{(k)} \right)' \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、積の微分公式より、

$$\begin{aligned} \left(u^{(m-k)} v^{(k)} \right)' &= \left(u^{(m-k)} \right)' v^{(k)} + u^{(m-k)} \left(v^{(k)} \right)' \\ &= u^{(m-k+1)} v^{(k)} + u^{(m-k)} v^{(k+1)} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (uv)^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^m {}_mC_k \left(u^{(m-k+1)} v^{(k)} + u^{(m-k)} v^{(k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_mC_k u^{(m+1-k)} v^{(k)} + \sum_{j=1}^{m+1} {}_mC_{j-1} u^{(m-j+1)} v^{(j)} \\ &= {}_mC_0 u^{(m+1)} v + \sum_{k=1}^m ({}_mC_k + {}_mC_{k-1}) u^{(m+1-k)} v^{(k)} \\ &= {}_{m+1}C_0 u^{(m+1)} v + \sum_{k=1}^m ({}_mC_k + {}_mC_{k-1}) u^{(m+1-k)} v^{(k)} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} {}_mC_k + {}_mC_{k-1} &= \frac{m!}{(m-k)!k!} + \frac{m!}{(m-k+1)!(k-1)!} \\ &= \frac{m!}{(m-k)!(k-1)!} \left(\frac{1}{(m-k+1)} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{m!}{(m-k)!(k-1)!} \frac{m+1}{(m-k+1)k} \\ &= \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!k!} \\ &= {}_{m+1}C_k \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (uv)^{(m+1)} &= {}_{m+1}C_0 u^{(m+1)} v + {}_{m+1}C_{m+1} uv^{(m+1)} + \sum_{k=1}^m {}_{m+1}C_k u^{(m+1-k)} v^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}C_k u^{(m+1-k)} v^{(k)} \end{aligned}$$

となり、 $n=m+1$ でもライプニッツの公式が成立する。

以上、[1], [2]より、数学的帰納法によって、任意の自然数に対してライプニッツの公式が成立することが示された。

(3)

(2)を利用することを考える。まず、

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - a^2)^n \\ &= \frac{d^n}{dx^n} (x+a)^n (x-a)^n \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} u(x) &= (x+a)^n \\ v(x) &= (x-a)^n \end{aligned}$$

とおくと、これらは何回でも微分可能な関数であるから、(2)のライプニッツの公式より、

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - a^2)^n \\ &= \frac{d^n}{dx^n} (x+a)^n (x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left\{ (x+a)^n \right\}^{(n-k)} \left\{ (x-a)^n \right\}^{(k)} \end{aligned}$$

となる。ここで、合成関数の微分公式より、

$$\begin{aligned} \left\{ (x \pm a)^n \right\}^{(k)} &= \left\{ n(x \pm a)^{n-1} \right\}^{(k-1)} \\ &= \left\{ n(n-1)(x \pm a)^{n-2} \right\}^{(k-2)} \\ &\vdots \\ &= {}_nP_k (x \pm a)^{n-k} \end{aligned}$$

となるから、

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n {}_nC_k {}_nP_{n-k} (x+a)^k {}_nP_k (x-a)^{n-k}$$

である。よって

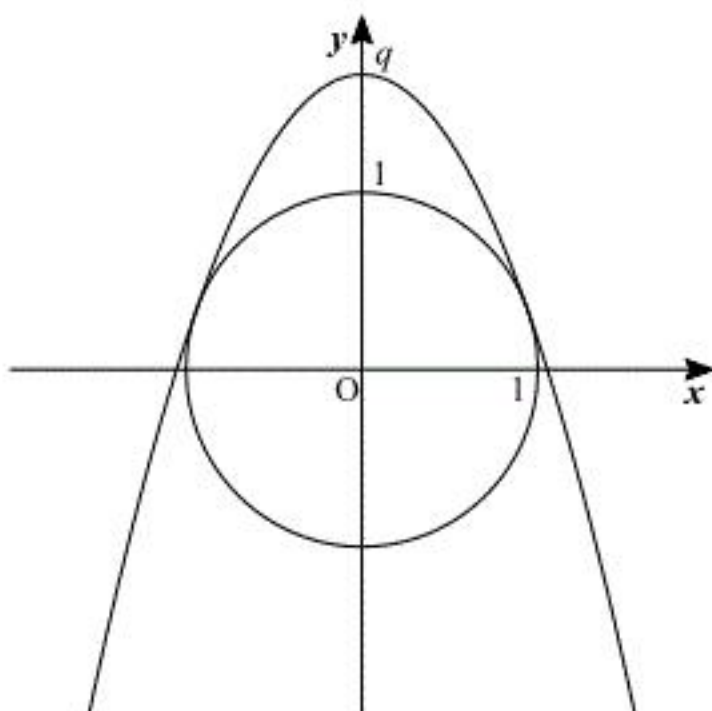
$$\begin{aligned} P_n(-a) &= {}_nC_0 {}_nP_{n-0} {}_nP_0 (-2a)^{n-0} + \sum_{k=1}^n {}_nC_k {}_nP_{n-k} 0^k {}_nP_k (-2a)^{n-k} \\ &= n!(-2a)^n + 0 \\ &= (-2)^n n!a^n \\ P_n(a) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k {}_nP_{n-k} (2a)^k {}_nP_k 0^{n-k} + {}_nC_n {}_nP_{n-n} (2a)^n {}_nP_n \\ &= 0 + {}_nC_n {}_nP_{n-n} (2a)^n {}_nP_n \\ &= 2^n n!a^n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_n(-a) = (-2)^n n!a^n, \quad P_n(a) = 2^n n!a^n$$

〔Ⅲ〕

(1)



原点を中心とする半径 1 の円に、放物線 $C: y = -\frac{p}{2}x^2 + q$ ($p > 0, q > 0$) が異なる 2 点で接しているとき、 y 軸対称性と、 $x > 0$ において放物線 C の接線の傾きが負であることを考慮すれば、この 2 接点は、

$$(s, \sqrt{1-s^2}), (-s, \sqrt{1-s^2}) \quad (0 < s < 1)$$

とおけることがわかる。この点で接するための必要十分条件は、

$$\begin{cases} \sqrt{1-s^2} = -\frac{p}{2}s^2 + q \\ \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} = -ps \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ かつ $0 < s < 1$ を満たす実数 s が存在するための条件を求めればよい。ここで、 $p > 0, q > 0, 0 < s < 1$ のもとで、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \\ p = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \end{cases}$$

であるから、求める関係式は $q = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$ であり、 p の取りうる値の範囲は、

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} > 1 \quad (\because 0 < s < 1)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) > 1 \quad (\because p > 1 \text{ で単調増加かつ } \lim_{p \rightarrow +\infty} q = +\infty)$$

であることがわかる。

(答) p, q の満たす関係式 $q = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$
 p, q の取りうる範囲 $p > 1, q > 1$

(2)

まず、 $p > 0, q > 0$ であるから、

$$-\frac{p}{2}x^2 + q = -\frac{p}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2q}{p}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{2q}{p}} \right)$$

より、

$$\begin{cases} -\sqrt{\frac{2q}{p}} = \alpha \\ \sqrt{\frac{2q}{p}} = \beta \end{cases}$$

とおくと、放物線 C の x 軸との交点は $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ となるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(-\frac{p}{2}x^2 + q \right) dx \\ &= -\frac{p}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\frac{p}{2} \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{4q}{3} \sqrt{\frac{2q}{p}} \end{aligned}$$

となる。ここで(1)より、

$$q = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$$

であるから、これを代入して、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \right\} \sqrt{\frac{2}{p} \left\{ \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \right\}} \\ &= \frac{2(p^2 + 1)\sqrt{p^2 + 1}}{3p^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2(p^2 + 1)\sqrt{p^2 + 1}}{3p^2}$

(3)

$$t = p^2 + 1$$

とおくと、 $p > 1$ のとき $t > 2$ で、

$$S = \frac{2t\sqrt{t}}{3(t-1)}$$

となる。ここで、

$$g(t) = \frac{2t\sqrt{t}}{3(t-1)}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{3\sqrt{t} \cdot 3(t-1) - 2t\sqrt{t} \cdot 3}{9(t-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{t}(t-3)}{3(t-1)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $g(t)$ の増減表は次表のようになる。

t	2	...	3	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		↘	極小	↗

よって S が最小となるのは $t = 3$ 、すなわち $p = \sqrt{2}$ のときで、このときの最小値は、

$$g(3) = \sqrt{3}$$

である。

(答) $\sqrt{3}$