

数 学 問 題

(平成 25 年 度)

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は 60 分である。
3. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに、以下の 5 および 6 に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は 1 ページから 2 ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に 2 枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後、2 枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1 枚につき受験番号は 2 箇所、氏名は 1 箇所）。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快や用便等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕 a, b, c は正の実数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 関数

$$\sqrt{x(a+x)} - a \log(\sqrt{x} + \sqrt{x+a})$$

の導関数を求めよ。

(2) 部分積分を用いて

$$\int \sqrt{x(bx+c)} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x(bx+c)} + \frac{c}{4} \int \sqrt{\frac{x}{bx+c}} dx \quad (x > 0)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 不定積分 $\int \sqrt{x(2x+1)} dx \quad (x > 0)$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 n 個のボールと、1 から n までの番号がふられた n 個の空の箱がある。また、1 から n の番号が書かれた n 枚のカードが袋の中に入っている。いま、以下の手順に従いボールを箱の中に入れていくことを考える。

手順 1 袋からカードを 1 枚無作為に取り出して、手順 2 に進む。

手順 2 手順 1 で取り出したカードに書かれている番号の箱が、

- 空ならば、そこにボールを 1 つ入れて、手順 3 へ進む。
- 空でなければ、カードを袋に戻さず手元に置き、手順 1 に戻る。

手順 3 手元のすべてのカードを袋に戻す。この時点で、

- すべての箱にボールが入っていれば終了する。
- 空の箱が 1 つでもあれば、手順 1 に戻る。

また、 $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k について、 $k-1$ 個目のボールを箱に入れ終わった状態(ただし、 $k=1$ のときは、はじめの状態とする)の後に、

- 次のボール、すなわち k 個目のボールを箱に入れるまでにちょうど i 枚のカードを袋から取り出す確率を $P_k(i)$ とし、
- i 枚のカードを袋から取り出してもまだ次のボールを箱に入れることができない確率を $Q_k(i)$ とする。ただし、 $Q_k(0) = 1$ とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n=4$ のとき $P_3(1), P_3(2), Q_3(2)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) $Q_k(i)$ を $P_k(i+1), P_k(i+2), \dots, P_k(k)$ を用いて表せ。ただし、 $0 \leq i \leq k-1$ とする。
- (3) $k-1$ 個目のボールを箱に入れてから k 個目のボールを箱に入れるまでに袋から取り出すカードの枚数の期待値 E_k は $Q_k(0) + Q_k(1) + \dots + Q_k(k-1)$ であることを示せ。
- (4) 不等式

$$E_k \leq \frac{n}{n-k+1}$$

が成り立つことを示せ。

- (5) 不等式

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n \leq n + n \log n$$

が成り立つことを示せ。