

〔Ⅰ〕

(1)

導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\&= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2)

不定積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\&= \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx \\&= -\log |\cos x| + C\end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad -\log |\cos x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}X &= \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\&= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。したがって、両辺を二乗すると、

$$\begin{aligned}X^2 &= \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \right) \\&= \frac{1}{2} (1 + \sin x) \\&\Leftrightarrow 1 + \sin x = 2X^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 + \sin x = 2X^2$$

(4)

与えられた不定積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \\&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \\&= \frac{1}{2} \cdot 2 \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C \quad ((1) \text{より}) \\&= \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C\end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(5)

(4)より、与えられた定積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin x} dx &= \left[x \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) dx \\&= \left[2 \log \left| \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= 0 - 2 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\&= \log 2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log 2$$

〔Ⅱ〕

(1)(ア)

$\frac{9}{10} < 1$ であるから、

$$\frac{q}{p} < 1 \Leftrightarrow q < p \ (\because p > 0)$$

が成り立つため、

$$q = p - r \quad (r \text{ は自然数})$$

とおくことができる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} &< \frac{q}{p} \\ \Leftrightarrow \frac{p-r}{p} - \frac{8}{9} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{p-9r}{9p} &> 0 \\ \therefore p &> 9r \ (\because p > 0) \\ \frac{q}{p} &< \frac{9}{10} \\ \Leftrightarrow \frac{9}{10} - \frac{p-r}{p} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{10r-p}{10p} &> 0 \\ \therefore p &< 10r \ (\because p > 0) \end{aligned}$$

となるため、 $\frac{8}{9} < \frac{q}{p} < \frac{9}{10}$ となるための条件は $9r < p < 10r$ である。 $r=1$ のときは $9 < p < 10$ となり、これを満たす p は存在しない。 $r=2$ のときは $18 < p < 20$ となり、これを満たす最小の p は

$$p = 19$$

である。このとき $q = p + r = 21$ となる。 $r \geq 3$ のときは $9r \geq 27 > 19$ となるため、 $9r < p < 10r$ を満たす p は 19 より大きくなる。以上より、 $\frac{8}{9} < \frac{q}{p} < \frac{9}{10}$ を満たす p の最小値は 19 である。

(答) 19

(イ)

(ア)と同様に、 $q = p - r$ とおくと、 p は

$$2014r < p < 2015r$$

を満たす。 $r=1$ のときは $2014 < p < 2015$ となり、これを満たす p は存在しない。 $r=2$ のときは $4028 < p < 4030$ これを満たす最小の p は

$$p = 4029$$

である。 $r \geq 3$ のときは $2014r \geq 6042 > 4029$ となるため、 $2014r < p < 2015r$ を満たす p は

4029 より大きくなる。以上より、 $\frac{2013}{2014} < \frac{q}{p} < \frac{2014}{2015}$ を満たす p の最小値は 4029 である。

(答) 4029

(2)(ア)

$dq - cp > 0, ap - bq > 0$ であつて、 a, b, c, d, p, q は自然数だから、 $dq - cp, ap - bq$ は自然数であり、 $dq - cp = Y, ap - bq = X$ (X, Y は自然数)とおくと、

$$\begin{aligned} \begin{cases} ap - bq = X \\ dq - cp = Y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ とおくと、行列式は

$$\det B = ad - bc = 1$$

となるから、逆行列が存在し、

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dX + bY \\ cX + aY \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで、 p の最小値は d, b, X, Y が自然数であることに注意すると、 $X = Y = 1$ のとき

$$p = b + d$$

が最小値である。このときの q の値は

$$q = a + c$$

である。

(答) $p = b + d, q = a + c$

(イ)

(ア)の条件は

$$\begin{aligned} \begin{cases} dq - cp > 0 \\ ap - bq > 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow \frac{c}{d} < \frac{q}{p} < \frac{a}{b} \end{aligned}$$

となるから、これをみたす p の最小値と、そのときの q の値は(ア)より

$$\frac{q}{p} = \frac{a+c}{b+d}$$

となる。ここで、 $a+c, b+d$ が互いに素でないと仮定すると、分数 $\frac{q}{p}$ は 2 以上の整数によって分子分母約分されてしまい、そのときの分母の値は p よりも小さくなる。これは①をみたす p の最小性に矛盾する。したがって、 $a+c, b+d$ は互いに素である。

(証明終)

(ウ)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、行列式は

$$\det A = ad - bc = 1$$

より、逆行列が存在し、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} A + A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \\ &= 10E \end{aligned}$$

となる(E は単位行列)。したがって、

$$(A + A^{-1})^3 = 1000E = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

となる。

(答) $\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}$