

【I】

(1)

与えられた連立方程式は

$$\begin{cases} x-ay+a^2z=a^4 & \cdots \textcircled{1} \\ x-by+b^2z=b^4 & \cdots \textcircled{2} \\ x-cy+c^2z=c^4 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。①+②+③より、

$$3x-(a+b+c)y+(a^2+b^2+c^2)z=a^4+b^4+c^4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= A^2-2B \\ a^4+b^4+c^4 &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-2\{(ab+bc+ca)^2-2(a^2bc+ab^2c+abc^2)\} \\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-2\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\} \\ &= (A^2-2B)^2-2(B^2-2CA) \end{aligned}$$

であるから、これを④に代入すると、

$$3x-Ay+(A^2-2B)z=(A^2-2B)^2-2(B^2-2CA) \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。また、②-①、③-②、①-③を計算すると、

$$\begin{cases} (a-b)y-(a^2-b^2)z=-(a^4-b^4) \\ (b-c)y-(b^2-c^2)z=-(b^4-c^4) \\ (c-a)y-(c^2-a^2)z=-(c^4-a^4) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)y-(a-b)(a+b)z=-(a-b)(a+b)(a^2+b^2) \\ (b-c)y-(b-c)(b+c)z=-(b-c)(b+c)(b^2+c^2) \\ (c-a)y-(c-a)(c+a)z=-(c-a)(c+a)(c^2+a^2) \end{cases}$$

となる。 a, b, c は相異なる実数であるから、それぞれ両辺を $(a-b), (b-c), (c-a)$ で割ると、

$$y-(a+b)z=-(a+b)(a^2+b^2) \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$y-(b+c)z=-(b+c)(b^2+c^2) \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$y-(c+a)z=-(c+a)(c^2+a^2) \quad \cdots \textcircled{8}$$

となる。⑥+⑦+⑧より、

$$\begin{aligned} 3y-2(a+b+c)z &= -(a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+ca^2+a^3) \\ \Leftrightarrow 3y-2(a+b+c)z &= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\ &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ca\}+3abc \\ &= A(A^2-3B)+3C \end{aligned}$$

であるから、

$$3y-2Az=-A(A^2-2B)-\{A(A^2-3B)+3C\} \quad \cdots \textcircled{9}$$

となる。また、⑦-⑥より、

$$\begin{aligned} (a-c)z &= a^3+a^2b+ab^2+b^3-b^3-b^2c-bc^2-c^3 \\ &= a^3+a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^3 \\ &= (a-c)(a^2+ab+ca+b^2+bc+c^2) \\ &= (a-c)\{(a+b+c)^2-ab-bc-ca\} \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow z=(a+b+c)^2-ab-bc-ca$$

$$=A^2-B$$

となる。これを⑤、⑨に代入すると、

$$y=AB-C$$

$$x=AC$$

となる。

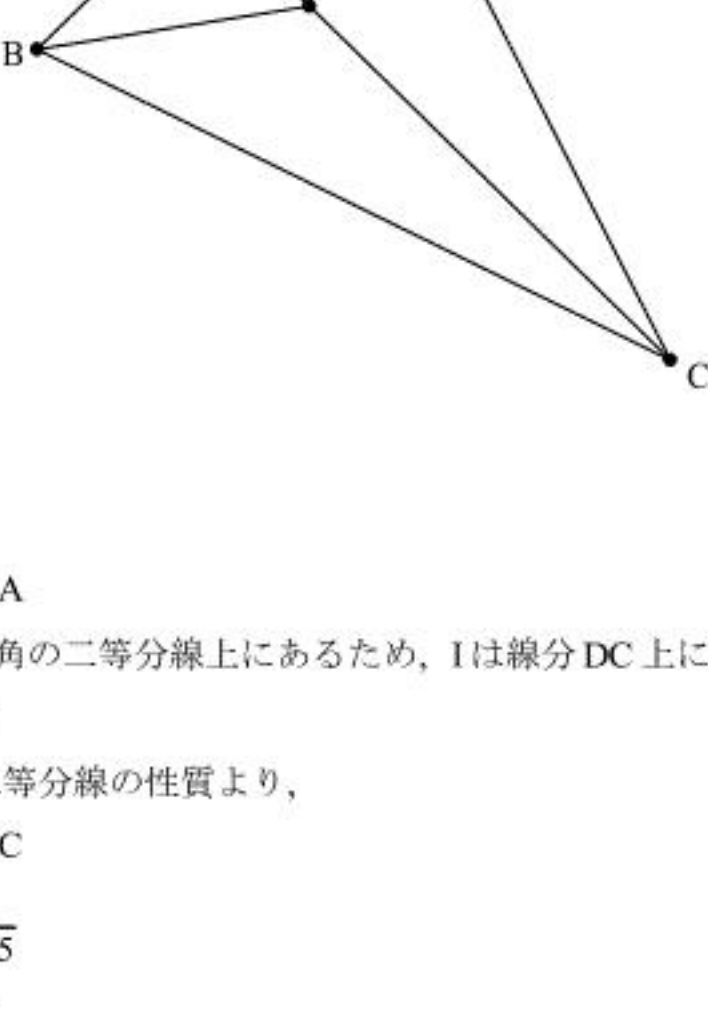
(答) $x=AC, y=AB-C, z=A^2-B$

(2)

内心をIとする。辺AB, BC, CAの長さは

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2} \\ &= \sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2} \\ &= \sqrt{5} \\ CA &= \sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。辺ABの中点をDとするとA, B, C, D, Iの位置関係は以下の図のようになる。



BC=CA となるから

$$\angle DCB = \angle DCA$$

となり、内心Iは各頂角の二等分線上にあるため、Iは線分DC上にある。また、

$$\angle DBI = \angle CBI$$

となるため、内角の二等分線の性質より、

$$\begin{aligned} DI:IC &= BD:BC \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}:\sqrt{5} \\ &= 1:\sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。点Dの座標は

$$D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

であるため、内心Iのx座標は

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{10} \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 3}{1 + \sqrt{10}} &= \frac{\left(\sqrt{10} \cdot \frac{3}{2} + 3\right)(\sqrt{10}-1)}{9} \\ &= \frac{12 + \frac{3}{2}\sqrt{10}}{9} \\ &= \frac{8 + \sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

となり、内心Iのy座標は

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{10} \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 1}{1 + \sqrt{10}} &= \frac{\left(\sqrt{10} \cdot \frac{5}{2} + 1\right)(\sqrt{10}-1)}{9} \\ &= \frac{24 - \frac{3}{2}\sqrt{10}}{9} \\ &= \frac{16 - \sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{8+\sqrt{10}}{6}, \frac{16-\sqrt{10}}{6}\right)$

(3)

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, y=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ とすると、}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy &= 2 \cdot \frac{\sqrt{4-2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

を代入すると、

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

と表すことができ、2倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} A^4 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} & -2\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\ 2\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} & \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ A^8 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -E \end{aligned}$$

となる。与えられた行列の和の左から $E-A$ をかけると、

$$\begin{aligned} (E-A)(A+A^2+\cdots+A^7+A^8) &= A-A^9 \\ &= A(E-A^8) \\ &= 2A \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $E-A$ の逆行列を計算すると、

$$\begin{aligned} (E-A)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1-x & y \\ -y & 1-x \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2+y^2} \begin{pmatrix} 1-x & -y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。上の式において、

$$\begin{aligned} (1-x)^2+y^2 &= \left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ &= 2 - \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ &= 2-2x \end{aligned}$$

となるため、①の両辺に左から $(E-A)^{-1}$ をかけると、

$$\begin{aligned} A+A^2+\cdots+A^7+A^8 &= 2(E-A)^{-1}A \\ &= \frac{1}{1-x} \begin{pmatrix} 1-x & -y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-x} \begin{pmatrix} x-x^2-y^2 & -y \\ y & x-x^2-y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。上の式において、

$$\begin{aligned} \frac{x-x^2-y^2}{1-x} &= \frac{x-\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{1-x} \\ &= \frac{x-1}{1-x} \\ &= -1 \\ \frac{y}{1-x} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

となるため、求める値は、

$$A+A^2+\cdots+A^7+A^8 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

(答) $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -1 \end{pmatrix}$

【Ⅱ】

(1)

問題文の条件より，開区間 D において $f(x)$ は連続かつ微分可能である。したがって平均値の定理より，

$$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=f'(c_1) \quad (a_1 < c_1 < a_2)$$

$$\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}=f'(c_2) \quad (a_2 < c_2 < a_3)$$

を満たす実数 c_1, c_2 が存在する。また， $f''(x) < 0$ であるから $f'(x)$ は単調減少である。 $c_1 < c_2$ より，

$$f'(c_1) > f'(c_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} > \frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}$$

となるため題意が示された。

(証明終)

(2)

与えられた不等式について， $x_1 = x_2$ のとき，

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(x_2)$$

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) = f(x_2)$$

となるため等号が成立する。 $\alpha = 0$ のとき，

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(x_2)$$

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) = f(x_2)$$

となるため等号が成立する。 $\alpha = 1$ のとき，

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(x_1)$$

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) = f(x_1)$$

となるため等号が成立する。 $x_1 < x_2$ ， $0 < \alpha < 1$ のとき，

$$x_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_1 < \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$$

$$x_2 = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_2 > \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$$

であるため，

$$x_1 < \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 < x_2$$

となる。したがって(1)で導いた不等式を用いると，

$$\frac{f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - f(x_1)}{(1-\alpha)(x_2 - x_1)} > \frac{f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)}{\alpha(x_2 - x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \{f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - f(x_1)\} > (1-\alpha) \{f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\}$$

$$\therefore f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $x_1 > x_2$ ， $0 < \alpha < 1$ のときも同様に①が導かれる。以上より， $0 \leq \alpha \leq 1$ において

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

与えられた条件より， $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ であるから， $\alpha_1 = 1$ のとき $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ である。したがってこのとき，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = f(x_1)$$

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3) = f(x_1)$$

となるため与えられた不等式について等号が成り立つ。 $\alpha_1 \neq 1$ のとき与えられた不等式の左辺を変形すると，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = f\left(\alpha_1 x_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}\right) \quad (\because \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0)$$

$$= f\left(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \cdot \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}\right) \quad (\because \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1)$$

ここで， $x_2 < x_3$ とすると

$$x_2 = \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2}{\alpha_2 + \alpha_3} < \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

$$x_3 = \frac{\alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3} > \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

となるため

$$x_2 < \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3} < x_3$$

となるため， $\frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}$ は D の実数である。 $x_2 \geq x_3$ のときも同様である。また， $0 \leq \alpha_1 < 1$ より，(2)で導いた不等式を用いて

$$f\left(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \cdot \frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}\right) \geq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f\left(\frac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}\right)$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + (\alpha_2 + \alpha_3) f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} x_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} x_3\right)$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + (\alpha_2 + \alpha_3) f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} x_2 + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}\right) x_3\right)$$

となる。 $0 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \leq 1$ であるから，

$$\alpha_1 f(x_1) + (\alpha_2 + \alpha_3) f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} x_2 + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}\right) x_3\right)$$

$$\geq \alpha_1 f(x_1) + (\alpha_2 + \alpha_3) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} f(x_2) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}\right) f(x_3)\right)$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + (\alpha_2 + \alpha_3) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} f(x_2) + \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} f(x_3)\right)$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

となる。以上より，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

が成立し題意が示された。

(証明終)

(4)

$f(x) = \log x$ とする。開区間 D において $f(x)$ は2回微分可能で，第2次導関数 $f''(x)$ は連続で，

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (\because x > 0)$$

となるため，(3)で導いた不等式を用いて，

$$\log\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \log\left(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}\right)$$

となる。 $f(x)$ の導関数を計算すると，

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad (\because x > 0)$$

となるため， $f(x)$ は単調増加関数である。以上より，

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

が成立する。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

$F(t)$ の導関数 $F'(t)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{t^2 + \alpha} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + \alpha}} + \alpha \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \alpha}}}{t + \sqrt{t^2 + \alpha}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{t^2 + \alpha + t^2 + \alpha}{\sqrt{t^2 + \alpha}} \\ &= \sqrt{t^2 + \alpha} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{t^2 + \alpha}$$

(2)

放物線の方程式 $y^2 = 4ax$ の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} 2y \frac{dy}{dx} &= 4a \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{y}{2a} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{y_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy \\ &= \int_0^{y_1} \sqrt{\left(\frac{y}{2a}\right)^2 + 1} dy \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{y_1} \sqrt{y^2 + 4a^2} dy \end{aligned}$$

となる。上の式において $F'(y) = \sqrt{y^2 + 4a^2}$ とすると, (1) より,

$$\begin{aligned} \int_0^{y_1} \sqrt{y^2 + 4a^2} dy &= [F(y)]_0^{y_1} \\ &= \left[\frac{1}{2} \left\{ y\sqrt{y^2 + 4a^2} + 4a^2 \log(y + \sqrt{y^2 + 4a^2}) \right\} \right]_0^{y_1} \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{2} \left\{ y\sqrt{y^2 + 4a^2} + 4a^2 \log(y + \sqrt{y^2 + 4a^2}) \right\} \right]_0^{y_1} \\ &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{2} \left\{ y\sqrt{y^2 + 4a^2} + 4a^2 \log(y + \sqrt{y^2 + 4a^2}) \right\} \right]_0^{2\sqrt{ax_1}} \quad (\because y_1 = 2\sqrt{ax_1}) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{ax_1} \sqrt{4ax_1 + 4a^2} + 4a^2 \log(2\sqrt{ax_1} + \sqrt{4ax_1 + 4a^2}) - 4a^2 \log(\sqrt{4a^2}) \right\} \\ &= \sqrt{x_1^2 + ax_1} + a \log \left(\sqrt{\frac{x_1}{a}} + \sqrt{\frac{x_1}{a} + 1} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{x_1^2 + ax_1} + a \log \left(\sqrt{\frac{x_1}{a}} + \sqrt{\frac{x_1}{a} + 1} \right)$$

【IV】

(1)

$n \geq 4$ を満たす整数 n について、 n 番のボールをおき終えたとき、 i 番のボールが左から j 番目に並ぶ確率を $P(n)$ とすると、

$$P(n) = \frac{1}{n} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=2$ のとき、

2 番のボールを1番のボールの左側、右側に置く確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。したがって、

$$P(2) = \frac{1}{2}$$

となり $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると、

$$P(k) = \frac{1}{k}$$

である。 $2 \leq j \leq k$ とすると、

[i] k 番のボールをおき終え、 i 番のボールが左から $j-1$ 番目に並ぶとき

i 番のボールが左から j 番目に並ぶようにするためには $k+1$ 番のボールを左から1番目のボールの左側、左から2番目のボールの左側、 $\cdots$ 、左から $j-1$ 番目のボールの左側におけばよい。このときのおき方は $k+1$ 通りのうち $j-1$ 通りである。

[ii] k 番のボールをおき終え、 i 番のボールが左から j 番目に並ぶとき

i 番のボールが左から j 番目に並ぶようにするためには $k+1$ 番のボールを左から j 番目のボールの右側、左から $j+1$ 番目のボールの右側、 $\cdots$ 、左から k 番目のボールの右側におけばよい。このときのおき方は $k+1$ 通りのうち $k-j+1$ 通りである。

以上、[i], [ii] より、 $2 \leq j \leq k$ のとき

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{1}{k} \cdot \frac{j-1}{k+1} + \frac{1}{k} \cdot \frac{k-j+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

となる。 $j=1$ のとき、 i 番のボールが左から1番目に並ぶようにするためには、 i 番のボールが一番左にある状態で $k+1$ 番のボールを左から1番目のボールの右側、左から2番目のボールの右側、 $\cdots$ 、左から k 番目のボールの右側におけばよい。このときのおき方は $k+1$ 通りのうち k 通りである。したがって

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

となる。 $j=k+1$ のとき、 i 番のボールが左から $k+1$ 番目に並ぶようにするためには、 i 番のボールが一番右にある状態で $k+1$ 番のボールを左から1番目のボールの左側、左から2番目のボールの左側、 $\cdots$ 、左から k 番目のボールの左側におけばよい。このときのおき方は $k+1$ 通りのうち k 通りである。したがって

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $P(k) = \frac{1}{k}$ と仮定すると $P(k+1) = \frac{1}{k+1}$ が成り立つ。

以上[1], [2]より、数学的帰納法から $n \geq 2$ において $\textcircled{1}$ を満たすため4以上のすべての整数 n において $\textcircled{1}$ が示された。

(証明終)

(2)

n 回の入れ替え操作の後列の中から選んだ2つのボールの組のうち、番号の大きいボールが番号の小さいボールより左側にある(必ずしも隣り合っていないてもよい)組の数を a_n とする。このとき、 a_0 としての最大値はボールが

$$n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1$$

のように並んでいるときで、このとき

$$\begin{aligned} a_0 &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

であり、 a_0 は高々 $\frac{n(n-1)}{2}$ の有限の数である。一回の入れ替え操作によりこのような組の数は1つ減少する。したがって、

$$a_{n+1} = a_n - 1 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

である。したがって入れ替え操作を繰り返すことで a_n が減少し、 a_n は非負整数であることから、 $a_n = 0$ となる n が必ず存在する。 $a_n = 0$ となるようなボールの並び方は

$$1, 2, \cdots, n-1, n$$

のみであり、これは番号順の列となっている。以上より題意は示された。

(証明終)

(3)

$\textcircled{2}$ より、 $a_n = 0$ となるような n を計算すると、

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - 1 \\ &= a_{n-2} - 2 \\ &\cdots \\ &= a_0 - n = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n = a_0$$

となるため、 n は初めのボールの並びだけに依存し、入れ替える組の選び方とは無関係である。

(証明終)

(4)

求める値を S_n とする。 $n+1$ 番のボールを左から k 番目のボールの右側におくとき、(2), (3)より、 $n+1$ 番のボールとその右にあるボールを入れ替える操作を繰り返すことで $n+1$ 番のボールを一番右に移動させることができる。したがって $n+1$ 番のボールを、より番号の小さいボールと入れ替える回数は $n-k$ 回である。一番左におくときを $k=0$ とすると、

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \sum_{k=0}^n (n-k) \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{n}{n+1} - \frac{k}{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{n+1} (n+1) - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} (n+1) n \\ &= n - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

となる。 $n-k$ 回の入れ替えの後、残った n 個のボールを入れ替える期待値の和は S_n であるから、

$$\begin{aligned} S_{n+1} - E_{n+1} &= S_n \\ \Leftrightarrow S_{n+1} - S_n &= E_{n+1} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のときボールを入れ替える必要がないため $S_1 = 0$ である。以上より、

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1) n \\ &= \frac{1}{4} n (n-1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4} n (n-1)$