

【1】

(1)

$$\begin{aligned} B(3, 2) &= \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x^3 (1-2x+x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B(3, 2) = \frac{1}{60}$$

(2)

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{m+1} x^{m+1} \right)' (1-x)^n dx \\ &= \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} \{ -n(1-x)^{n-1} \} dx \\ &= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B(m, n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1)$$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) \\ B(m+1, n-1) &= \frac{n-1}{m+2} B(m+2, n-2) \\ &\vdots \\ B(m+n-1, 1) &= \frac{1}{m+n} B(m+n, 0) \end{aligned}$$

となるから、辺々かけ合わせて

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{1}{m+n} B(m+n, 0) \\ &= \frac{n!m!}{(m+n)!} B(m+n, 0) \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} B(m+n, 0) &= \int_0^1 x^{m+n} dx \\ &= \left[\frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{m+n+1} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{m!n!}{(m+n)!} \cdot \frac{1}{m+n+1} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(4)

$$A(m, n) = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} \right\}' (x-b)^n dx \\ &= \left[\frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} (x-b)^n \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} \cdot n(x-b)^{n-1} dx \\ &= -\frac{n}{m+1} \int_a^b (x-a)^{m+1} (x-b)^{n-1} dx \\ &= -\frac{n}{m+1} A(m+1, n-1) \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} A(m, n) &= -\frac{n}{m+1} A(m+1, n-1) \\ A(m+1, n-1) &= -\frac{n-1}{m+2} A(m+2, n-2) \\ &\vdots \\ A(m+n-1, 1) &= -\frac{1}{m+n} A(m+n, 0) \end{aligned}$$

となるから、辺々かけ合わせて

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \left(-\frac{n}{m+1} \right) \cdot \left(-\frac{n-1}{m+2} \right) \cdots \left(-\frac{1}{m+n} \right) A(m+n, 0) \\ &= (-1)^n \frac{n!m!}{(m+n)!} A(m+n, 0) \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} A(m+n, 0) &= \int_a^b (x-a)^{m+n} dx \\ &= \left[\frac{1}{m+n+1} (x-a)^{m+n+1} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{m+n+1} (b-a)^{m+n+1} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} A(m, n) &= (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n)!} \cdot \frac{1}{m+n+1} (b-a)^{m+n+1} \\ &= (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (b-a)^{m+n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A(m, n) = (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (b-a)^{m+n+1}$$

【Ⅱ】

(1)

加法定理より

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta\end{aligned}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果を用いて $\theta = \frac{\pi}{9}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{3} &= 3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= 3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{9} \\ \Leftrightarrow 4 \sin^3 \frac{\pi}{9} - 3 \sin \frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $x = \sin \frac{\pi}{9}$ は方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の解である。次に、 $\theta = \frac{2\pi}{9}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi}{3} &= 3 \sin \frac{2\pi}{9} - 4 \sin^3 \frac{2\pi}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= 3 \sin \frac{2\pi}{9} - 4 \sin^3 \frac{2\pi}{9} \\ \Leftrightarrow 4 \sin^3 \frac{2\pi}{9} - 3 \sin \frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $x = \sin \frac{2\pi}{9}$ は方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の解である。さらに、 $\theta = -\frac{4\pi}{9}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin \left(-\frac{4\pi}{3}\right) &= 3 \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) - 4 \sin^3 \left(-\frac{4\pi}{9}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= 3 \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) - 4 \sin^3 \left(-\frac{4\pi}{9}\right) \\ \Leftrightarrow 4 \sin^3 \left(-\frac{4\pi}{9}\right) - 3 \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $x = \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ は方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の解である。以上より、

$x = \sin \frac{\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9}, \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ はいずれも方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の解であることが示された。

(証明終)

(3)

方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ は高々3つの実数解をもち、 $\sin \frac{\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9}, \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ は相異なる値で

あるから、(2)の結果より方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の実数解は $x = \sin \frac{\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9}, \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ であ

る。よって、解と係数の関係より

$$\begin{aligned}\sin \left(\frac{\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\sin \left(\frac{\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{4\pi}{9}\right) &= -\sin \left(\frac{\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sin \left(\frac{\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(4)

正の整数 n に対して、 $\sin x \neq 0$ のとき

$$\cos x \cos 2x \cos 2^2 x \cdots \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

①について

$$(\text{左辺}) = \cos x$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{\sin 2x}{2 \sin x} \\ &= \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

となるから、①は成り立つ。

[2] $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき①が成り立つと仮定する場合

$$\cos x \cos 2x \cos 2^2 x \cdots \cos 2^{k-1} x = \frac{\sin 2^k x}{2^k \sin x}$$

が成り立つもとで、

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x} &= \frac{\sin 2 \cdot 2^k x}{2^{k+1} \sin x} \\ &= \frac{2 \sin 2^k x \cos 2^k x}{2^{k+1} \sin x} \\ &= \frac{\sin 2^k x}{2^k \sin x} \cos 2^k x \\ &= \cos x \cos 2x \cos 2^2 x \cdots \cos 2^{k-1} x \cos 2^k x\end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも①は成り立つ。

以上、[1], [2]より、正の整数 n に対して、 $\sin x \neq 0$ のとき①が成り立つことが示された。

(証明終)

(5)

(4)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \cos 20^\circ \cos (2 \cdot 20^\circ) \cos (2^2 \cdot 20^\circ) \\ &= \frac{\sin (2^3 \cdot 20^\circ)}{2^3 \sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

(6)

(3)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \sin \left(\frac{\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin \left(\frac{4\pi}{9}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ &= \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{8}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \tan \theta$ となる $\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ の値は

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$