

【Ⅰ】

〔解答〕

(1-i) $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$ (1-ii) $p_n = \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(2) $\frac{3}{2}a^2$

(3) $-\frac{1}{2}a^2$

(4) $3 \cdot 2^{n+1} - n^2 - 4n - 6$

〔解説〕

(1) 硬貨を投げるとき、表と裏の出方は同様に確からしいとする。

(ア) 点 n に到達するのは
[1] 点 $n-1$ に到達し、次に裏が出る場合
[2] 点 $n-2$ に到達し、次に表が出る場合
があり、[1], [2] は互いに排反である。よって、これらの確率の関係は

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$$

となる。

(イ) (ア)の結果を用いて

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

である。①より数列 $\left\{p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n\right\}$ は初項 $p_2 + \frac{1}{2}p_1$ の定数列であるから

$$p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_2 + \frac{1}{2}p_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となり、②より数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は初項 $p_2 - p_1$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - p_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (p_2 - p_1) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。ここで、点1に到達するのは1回目に裏が出る場合であるから

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

であり、また、点2に到達するのは1回目に表が出る場合、または1回目と2回目ともに裏が出る場合であり、これらは互いに排反であるから

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、③より

$$p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = 1$$

となり、④より

$$\begin{aligned} p_n - p_{n-1} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} 3p_n &= 1 \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a \cos \theta \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta}}{1 + \tan^3 \theta} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

であり、 $t = \tan \theta$ とおくと $dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ であり、積分区間は以下のように対応する。

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\rightarrow$	∞

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{3}(1+t^3)'}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{3}{2} a^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{(1+t^3)'}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{3}{2} a^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1+t^3} \right]_0^R \\ &= \frac{3}{2} a^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1+R^3} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{2} a^2 \end{aligned}$$

となる。

(3)

点 P は辺 AD の中点、点 Q は辺 BC の中点であるから

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \\ \overline{BP} &= \overline{AP} - \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AD} - \overline{AB} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \overline{AQ} \cdot \overline{BP} &= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{AD} - \overline{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AD} - |\overline{AB}|^2 + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AD} - \overline{AC} \cdot \overline{AB}\right) \end{aligned}$$

である。ここで、四面体 ABCD は一辺の長さが a の正四面体であるから、 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ は大き

さが a であり、互いになす角はすべて $\frac{\pi}{3}$ となる。よって

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AD} &= a \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

となり、同様にして $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}a^2$ である。以上より

$$\begin{aligned} \overline{AQ} \cdot \overline{BP} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}a^2 - a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

である。

(4)

$S = \sum_{j=1}^n j^2 2^{n-j}$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= 2S - S \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 2^{n-j+1} - \sum_{j=1}^n j^2 2^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 2^{n-j+1} - \sum_{j=0}^n j^2 2^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 2^{n-(j+1)+1} - \sum_{j=0}^n j^2 2^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \{(j+1)^2 - j^2\} 2^{n-j} - n^2 \cdot 2^0 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) 2^{n-j} - n^2 \end{aligned}$$

となる。さらに、 $T = \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) 2^{n-j}$ とおくと

$$\begin{aligned} T &= 2T - T \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) 2^{n-j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) 2^{n-j} \\ &= \left\{1 \cdot 2^{n+1} + \sum_{j=1}^{n-1} (2j+1) 2^{n-j+1}\right\} - \left\{\sum_{j=0}^{n-2} (2j+1) 2^{n-j} + (2n-1) \cdot 2^1\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \{2(j+1)+1\} 2^{n-(j+1)+1} - \sum_{j=0}^{n-2} (2j+1) 2^{n-j} + 2^{n+1} - 2(2n-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \{(2j+3) - (2j+1)\} 2^{n-j} + 2^{n+1} - 2(2n-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} 2^{n-j+1} + 2^{n+1} - 2(2n-1) \\ &= 2^1 \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} + 2^{n+1} - 2(2n-1) \\ &= 8 \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2-1} + 2^{n+1} - 2(2n-1) \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} - 4n - 6 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} S &= T - n^2 \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} - n^2 - 4n - 6 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

平面上の相異なる 3 点を A, B, C とする。線分 AB の垂直二等分線は 2 点 A, B からの距離が等しい点の集合であり、線分 BC の垂直二等分線は 2 点 B, C からの距離が等しい点の集合である。また、3 点 A, B, C が同一直線上にないとき、線分 AB 、線分 BC の垂直二等分線は平行でなく、交点がただ一つ存在する。よって、3 点 A, B, C からの距離がすべて等しい点は線分 AB 、線分 BC の垂直二等分線の交点ただ一つしか存在しないから、この交点を中心とし、3 点を通る円がただ一つ存在する。以上より、この 3 点を通る円は必ず存在し、かつ、一つだけしかないことが示された。

(証明終)

(2)

線分 AB を直径とする円は、内部に点 C を含まないことを背理法を用いて証明する。点 C が線分 AB を直径とする円の内部に存在すると仮定する。この円と半直線 AC の交点を P とすると、点 C は円の内部に存在するから

$$AC < AP \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、線分 AB を直径とする円上において点 A からの距離が最も大きい点は点 B であるから

$$AP < AB \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。このとき、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$AC < AB$$

となるが、これは 3 点 A, B, C のうち A, B 間の距離が他の 2 点間の距離より短いことに矛盾する。よって、仮定は誤りであり、線分 AB を直径とする円は、内部に点 C を含まないことが示された。

(証明終)

(3)

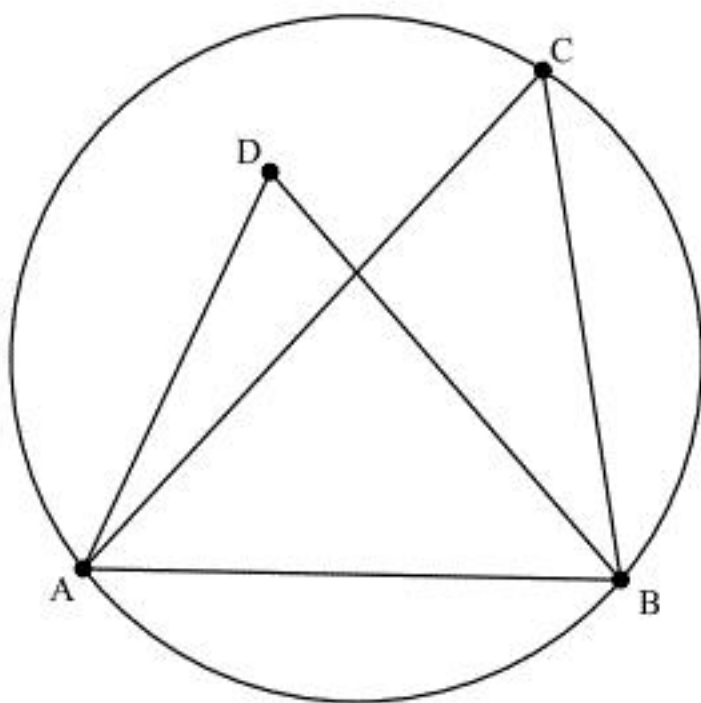
平面上の相異なる 4 点を A, B, C, D とする。2 点 C, D が直線 AB に関して同じ側にあるとして一般性を失わない。(1)の結果より、3 点 A, B, C を通る円は一つだけ存在し、条件より点 D はこの円周上には存在しない。点 D の位置について

[1] 点 D が円の外側に存在するとき

4 点 A, B, C, D のうち 3 点 A, B, C を選ぶと、その 3 点を通る円は、残りの点 D を内部に含まない。

[2] 点 D が円の内側に存在するとき

2 点 C, D は直線 AB に関して同じ側にあるから、各点の位置関係は下図のようになる。



円周角の関係より

$$\angle ACB < \angle ADB \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。3 点 A, B, D を通る円を考えると、この円の弧 AB に対する円周角 $\angle ADB$ よりも $\angle ACB$ の方が小さいことから、点 C はこの円の外側に存在することがわかる。よって、4 点 A, B, C, D のうち 3 点 A, B, D を選ぶと、その 3 点を通る円は、残りの点 C を内部に含まない。

以上、[1]、[2]より、うまく 3 点を選ぶと、その 3 点を通る円は、残りの点を内部に含まないようにできることが示された。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

近似式に $a = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{3}} &\doteq 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)}{6}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3\end{aligned}$$

と表される。よって

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} &= 5^{\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\doteq 5^{\frac{1}{6}} \left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{9} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3\right\} \left(\because \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right| < 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} &= 5^{\frac{1}{6}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\doteq 5^{\frac{1}{6}} \left\{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{9} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{5}{81} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3\right\} \left(\because \left|-\frac{2}{\sqrt{5}}\right| < 1\right)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} &\doteq 2 \cdot 5^{\frac{1}{6}} \left\{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{5}{81} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3\right\} \\ &= 2 \cdot 5^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{62}{81\sqrt{5}} \\ &= \frac{124}{81} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \\ &\doteq \frac{124}{81} \cdot 0.6 \\ &= 0.9\dot{1}8\dot{5}\end{aligned}$$

である。

(答) 0.9\dot{1}8\dot{5}

(2)

$x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ とおくと

$$\begin{aligned}x^3 &= \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\ &= (\sqrt{5}+2) - 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} + 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{2}{3}} - (\sqrt{5}-2) \\ &= 4 - 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} \left\{(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}\right\} \\ &= 4 - 3\left\{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)\right\}^{\frac{1}{3}} x \left(\because x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\ &= 4 - 3\{5-4\}^{\frac{1}{3}} x \\ &= 4 - 3x\end{aligned}$$

となるから、 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ は方程式

$$\begin{aligned}x^3 &= 4 - 3x \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 &= 0\end{aligned}$$

の解の 1 つである。一方

$$\begin{aligned}x^3 + 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right\} &= 0\end{aligned}$$

となるから、方程式 $x^3 + 3x - 4 = 0$ の実数解は $x = 1$ のみである。 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ は実数であ

り方程式 $x^3 + 3x - 4 = 0$ の解の 1 つであるから、 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ が成り立つことが示された。

(証明終)

〔Ⅳ〕

(1)

自然数からなる数列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の最小値が x であるとき

$$x_1 \geq x, x_2 \geq x, \cdots, x_n \geq x \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x \\ &= \frac{1}{n} \cdot nx \\ &= x \end{aligned}$$

が成り立つ。この等号は①における全ての等号が成立するとき成り立つ。以上より、

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ と } x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x \text{ は、同値であることが示された。}$$

(証明終)

(2)

$a_i - 1 = c_i$ とおくと、 a_i, b_i はともに自然数であるから、

$$\begin{aligned} b_i < a_i \text{ かつ } b_{i+1} < a_i \\ \Leftrightarrow b_i \leq c_i \text{ かつ } b_{i+1} \leq c_i \end{aligned} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N a_i - N}{\sum_{i=1}^{N+1} b_i} = \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - 1)}{\sum_{i=1}^{N+1} b_i} = \frac{\sum_{i=1}^N c_i}{\sum_{i=1}^{N+1} b_i} = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i}{\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} b_i}$$

と変形できる。ここで c_i の最小値を c_m (m は $1 \leq m \leq N$ を満たす自然数) とすれば、②より

$$b_i \leq \begin{cases} c_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ c_{i-1} & (i = m+1, m+2, \cdots, N+1) \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} b_i &\leq \frac{1}{N+1} (c_1 + c_2 + \cdots + c_m + c_m + \cdots + c_N) \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\sum_{i=1}^N c_i + c_m \right) \end{aligned} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。また、 $c_m \leq c_i$ ($1 \leq i \leq N$) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \left(\sum_{i=1}^N c_i + c_m \right) &= \frac{1}{N+1} \left(\sum_{i=1}^N c_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_m \right) \\ &\leq \frac{1}{N+1} \left(\sum_{i=1}^N c_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i \end{aligned} \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つ。したがって、④、⑤より

$$\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} b_i \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i}{\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} b_i} \quad (\because b_i, N \text{ は自然数})$$

とわかるから、

$$F = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i}{\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} b_i} \geq \frac{N}{N+1}$$

となる。また、 $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 2, b_1 = b_2 = \cdots = b_{N+1} = 1$ は条件を満たし、このとき実際に

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N 2 - N}{\sum_{i=1}^{N+1} 1} = \frac{2N - N}{N+1} = \frac{N}{N+1}$$

となるから、 F は $\frac{N}{N+1}$ をとりえる。したがって F がとりえる最小値は $\frac{N}{N+1}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{N}{N+1}$$

(3)

(2)のような最小値をとる条件は、④、⑤の等号が成立することに他ならない。ここで

$$\begin{aligned} &\text{『④の等号が成立する』} \\ \Leftrightarrow &\text{『③の等号が成立する』} \\ \Leftrightarrow b_i &= \begin{cases} c_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ c_{i-1} & (i = m+1, m+2, \cdots, N+1) \end{cases} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} &\text{『⑤の等号が成立する』} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i &= c_m \\ \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_N &= c_m \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

となる。したがって、この2つの条件を合わせると、

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = \cdots = c_N &= b_1 = b_2 = \cdots = b_N \\ \therefore a_1 = a_2 = \cdots = a_N &= b_1 + 1 = b_2 + 1 = \cdots = b_{N+1} + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_N = b_1 + 1 = b_2 + 1 = \cdots = b_{N+1} + 1$$