

数 学 問 題

(平成 27 年 度)

【注意事項】

1. 試験時間は 60 分である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は 1 ページから 2 ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に 2 枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後、2 枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1 枚につき受験番号は 2 箇所、氏名は 1 箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
9. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
10. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
11. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
12. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕 負でない整数 m, n に対して,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

と定義する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $B(3, 2)$ を求めよ。

(2) $B(m, n)$ を $B(m+1, n-1)$ を使って表せ (ただし, $n \geq 1$ とする)。

(3) $B(m, n)$ を求めよ。

(4) a, b を相異なる実数とする。このとき,

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx$$

を求めよ。

〔Ⅱ〕 以下の問いに答えよ。

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $x = \sin\frac{\pi}{9}, \sin\frac{2\pi}{9}, \sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ はいずれも方程式 $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の解であることを証明せよ。

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ の値を求めよ。

(4) $\sin x \neq 0$ のとき,

$$\cos x \cos 2x \cos 2^2 x \cdots \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、 n は正の整数とする。

(5) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ の値を求めよ。

(6) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \tan \theta$ となる θ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。