

【 I 】

(1)

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\log |\cos x| + C_1\end{aligned}$$

となる。ただし C_1 は積分定数である。

(答) $-\log |\cos x| + C_1$ (C_1 は積分定数)

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tan^n x}{\sin x}\right)' &= \frac{n \tan^{n-1} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x - \tan^n x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{n \tan^{n-1} x}{\cos^2 x \sin x} - \frac{\tan^n x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x} \\ &= \frac{n \tan^{n-1} x}{\cos^2 x \sin x} - \frac{\tan^{n-1} x}{\sin x} \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{\sin x} \left(\frac{n}{\cos^2 x} - 1 \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\tan^{n-1} x}{\sin x} \left(\frac{n}{\cos^2 x} - 1 \right)$

(3)

$$\int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^{n-2} x (\tan x)' dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C_2$$

となる。ただし、 C_2 は積分定数である。

(答) $\frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C_2$ (C_2 は積分定数)

(4)

(3)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x} dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(5)

(1), (4)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx &= \left[\frac{1}{2} \tan^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[-\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$

〔Ⅱ〕

(1)

頂点 A にいる状態から1回の試行を行うと、頂点 B, C のいずれかに移動する。よって、

$$P_1(A)=0$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_1(A)=0$$

(2)

4回の試行の後に頂点 A にいるのは、

$$A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$$

$$A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$$

$$A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$$

$$A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

$$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$

のいずれかの通りに移動する場合である。また、移動方法の総数は

$$2^4=16 \text{ 通り}$$

であり、これらの事象は同様に確からしい。よって、求める確率は

$$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{8}$$

(3)

n 回の試行の後に頂点 A にいるのは、 $n-1$ 回の試行の後に頂点 B もしくは頂点 C にいて、次の試行で頂点 A に移動する場合に限られる。ここで、 $n-1$ 回の試行の後に頂点 B もしくは頂点 C にいる確率は $1-P_{n-1}(A)$ である。また、頂点 B もしくは頂点 C から頂点 A に移動する確

率はいずれも $\frac{1}{2}$ である。したがって、

$$P_n(A)=\{1-P_{n-1}(A)\} \times \frac{1}{2} = \frac{1-P_{n-1}(A)}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_n(A)=\frac{1-P_{n-1}(A)}{2}$$

(4)

(3)の結果より、

$$P_{n+1}(A)=\frac{1-P_n(A)}{2}$$

$$P_n(A)=\frac{1-P_{n-1}(A)}{2}$$

となるから、上式の辺々を引くことによって

$$P_{n+1}(A)-P_n(A)=-\frac{1}{2}\{P_n(A)-P_{n-1}(A)\}$$

となる。したがって、数列 $\{P_n(A)-P_{n-1}(A)\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となるから、

$$\begin{aligned} P_n(A)-P_{n-1}(A) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \{P_1(A)-P_0(A)\} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (0-1) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_n(A)-P_{n-1}(A)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(5)

(1), (4)の結果より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P_n(A) &= \sum_{k=2}^n \{P_k(A)-P_{k-1}(A)\} + P_1(A) \\ &= -\sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

となる。また、この式は $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad P_n(A)=\frac{1}{3} \left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$