

【Ⅰ】

【解答】

(1-1)	(1-2)
$50-5\sqrt{2}$	$50+10\sqrt{2}$
(2-1)	(2-2)
(2, 3, 1, 2)	(556, 321)
(3)	
$a_n=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-10\cdot 2^{n-1}+3n+\frac{9}{2}$	
(4)	
$\frac{n!}{k!}\cdot\frac{(\log x)^k}{x}$	

【解説】

(1)

仮定より

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2n\cdot a + n\cdot b}{3n} = \frac{2a+b}{3} \\ s^2 &= \frac{2n\left(a-\frac{2a+b}{3}\right)^2 + n\cdot\left(b-\frac{2a+b}{3}\right)^2}{3n} \\ &= \frac{2\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 + \left(\frac{2b-2a}{3}\right)^2}{3} \\ &= \frac{2(b-a)^2}{9} \\ \therefore s &= \sqrt{s^2} = \frac{\sqrt{2}(b-a)}{3} \quad (\because b > a)\end{aligned}$$

となる。よって、 a 点を取った学生の偏差値は

$$50+10\times\frac{a-\frac{2a+b}{3}}{\frac{\sqrt{2}(b-a)}{3}}=50-5\sqrt{2}$$

となり、 b 点を取った学生の偏差値は

$$50+10\times\frac{b-\frac{2a+b}{3}}{\frac{\sqrt{2}(b-a)}{3}}=50+10\sqrt{2}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}X^2-3Y^2&=13 \\ \Leftrightarrow (ax+by)^2-3(cx+dy)^2&=13 \\ \Leftrightarrow (a^2-3c^2)x^2+2(ab-3cd)xy+(b^2-3d^2)y^2&=13\end{aligned}$$

となる。これと与式 $x^2-3y^2=13$ の係数を比較すると

$$\begin{cases} a^2-3c^2=1 \\ 2(ab-3cd)=0 \\ b^2-3d^2=-3 \end{cases}$$

となり、これらを満たす自然数の組 (a, b, c, d) として

$$(a, b, c, d)=(2, 3, 1, 2)$$

が挙げられる。したがって、 $X=2x+3y$ 、 $Y=x+2y$ とおくと、 $x^2-3y^2=13$ を満たすとき、

$X^2-3Y^2=13$ も満たされる。また、 $x^2-3y^2=13$ を満たす自然数 (x, y) の組の1つとして、

$$(x, y)=(4, 1)$$

が挙げられる。したがって、

$$(X, Y)=(2\cdot 4+3\cdot 1, 4+2\cdot 1)=(11, 6)$$

より、 $(x, y)=(11, 6)$ も $x^2-3y^2=13$ を満たす。この関係を順次適用すると、

$$(x, y)=(11, 6) \text{ のとき、} (X, Y)=(40, 23)$$

$$(x, y)=(40, 23) \text{ のとき、} (X, Y)=(149, 86)$$

$$(x, y)=(149, 86) \text{ のとき、} (X, Y)=(556, 321)$$

となるから、 $x > 500$ となる解の組 (x, y) の1つは $(556, 321)$ である。

(3)

実数 p, q を用いて

$$\begin{aligned}a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n&=0 && \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}+p(n+1)+q&=2(a_{n+1}-3a_n+pn+q)\end{aligned}$$

と分解することを考える。第2式を展開し整理すると、

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-pn+p-q=0$$

となるから、 $\textcircled{1}$ と係数を比較すると、

$$(p, q)=(6, 6)$$

となり、 $\textcircled{1}$ は

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+6(n+1)+6=2(a_{n+1}-3a_n+6n+6)$$

と変形できる。ここで、数列 $\{a_{n+1}-3a_n+6n+6\}$ の初項は

$$a_2-3a_1+6+6=10$$

であり、公比は2であるから、

$$a_{n+1}-3a_n+6n+6=10\cdot 2^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。同様にして、 $\textcircled{1}$ は

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+3(n+1)+\frac{3}{2}=3\left(a_{n+1}-2a_n+3n+\frac{3}{2}\right)$$

と変形できる。数列 $\left\{a_{n+1}-2a_n+3n+\frac{3}{2}\right\}$ の初項は

$$a_2-2a_1+3+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

であり、公比は3であるから、

$$a_{n+1}-2a_n+3n+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。よって、 $\textcircled{3}-\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}a_n-3n-\frac{9}{2}&=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-10\cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n&=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-10\cdot 2^{n-1}+3n+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

を得る。

(4)

$n \geq 1$ を仮定し、 $I_n = \int \left\{ -\frac{(\log x)^n}{x^2} \right\} dx$ とおくと、

$$\begin{aligned}I_n &= \int \left\{ -\frac{(\log x)^n}{x^2} \right\} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} \right)' (\log x)^n dx \\ &= \frac{(\log x)^n}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{(\log x)^n}{x} + nI_{n-1}\end{aligned}$$

となる。上式両辺を $n!$ で割ると

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{n!} &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{(\log x)^n}{x} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{I_n}{n!} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{(\log x)^n}{x}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{n!} &= \frac{I_0}{0!} + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{I_k}{k!} - \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} \right\} \\ &= \frac{I_0}{0!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(\log x)^k}{x}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{I_0}{0!} &= \frac{1}{0!} \cdot \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{(\log x)^0}{x}\end{aligned}$$

となるから、 $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{n!} &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{(\log x)^0}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(\log x)^k}{x} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(\log x)^k}{x} \\ \Leftrightarrow I_n &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(\log x)^k}{x}\end{aligned}$$

となり、この関係は $n=0$ のときも成り立つ。

〔Ⅱ〕

(1)

3枚のカードに書かれている数字を1, 2, 3としても一般性を失わない。3枚のカードの並べ方は6通り考えられ、これらは同様に確からしく起こる。戦略 S_1 にしたがった場合、勝てる並べ方は

$$(1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)$$

の3通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

(2)

(1)と同様に、 n 枚のカードに書かれている数字を1, 2, 3, ..., n としても一般性を失わない。ここで、ちょうど i 枚のカードをめくって勝つための条件は、

$$「i \text{ 枚目のカードに書かれた数字は } n \text{ である}」 \quad \cdots \textcircled{1}$$

かつ

$$「1 \text{ 枚目から } (i-1) \text{ 枚目のうち、数字が最大のものは } k \text{ 枚目までに登場する}」 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①の確率は $\frac{1}{n}$ であり、②の確率は $\frac{k}{i-1}$ であるから、求める確率は

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{i-1} = \frac{k}{n(i-1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{k}{n(i-1)}$$

(3)

(2)の結果より、

$$P_{n,k} = \sum_{i=k+1}^n \frac{k}{n(i-1)}$$

であるから

$$\begin{aligned} P_{3p,p} &= \sum_{i=p+1}^{3p} \frac{p}{3p(i-1)} \\ &= \sum_{i=p+1}^{3p} \frac{1}{3(i-1)} \\ &= \sum_{i=p}^{3p-1} \frac{1}{3i} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=p}^{3p-1} \frac{1}{3 \cdot \frac{i}{p}} \end{aligned}$$

となる。ここで $p \rightarrow \infty$ とすると、区分求積法より、

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} P_{n,k} &= \lim_{p \rightarrow \infty} P_{3p,p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{i=p}^{3p-1} \frac{1}{3 \cdot \frac{i}{p}} \\ &= \int_1^3 \frac{1}{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} [\log x]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} \log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} \log 3$$

【Ⅲ】

(1)

$y = \phi(x) \Leftrightarrow x = \tan y$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \\ \therefore \phi'(x) &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \phi'(\sqrt{2}x+1) + \phi'(\sqrt{2}x-1) &= \frac{(\sqrt{2}x+1)'}{1+(\sqrt{2}x+1)^2} + \frac{(\sqrt{2}x-1)'}{1+(\sqrt{2}x-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2x^2+2\sqrt{2}x+2} + \frac{\sqrt{2}}{2x^2-2\sqrt{2}x+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \left(\log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right)' &= \left(\log(x^2+\sqrt{2}x+1) - \log(x^2-\sqrt{2}x+1) \right)' \\ &= \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1) - (x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{x^4+1} \\ &= \frac{1}{x^4+1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{x^4+1}$

(2)

(1)の結果を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx &= \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \phi(\sqrt{2}x+1) + \phi(\sqrt{2}x-1) \right\} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \phi(\sqrt{2}+1) + \phi(\sqrt{2}-1) \right\} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \phi(1) + \phi(-1) \right\} \end{aligned}$$

となる。まず、

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log (\sqrt{2}+1)^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log (\sqrt{2}+1)$$

である。次に、 $0 < y < \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\frac{1}{\tan y} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - y \right)$$

が成り立つから、 $\tan \alpha = \sqrt{2}-1$ 、すなわち $\alpha = \phi(\sqrt{2}-1)$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \\ \Leftrightarrow \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \sqrt{2}+1 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha &= \phi(\sqrt{2}+1) \\ \therefore \phi(\sqrt{2}+1) + \phi(\sqrt{2}-1) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{4} &= 1, \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1 \\ \therefore \phi(1) &= \frac{\pi}{4}, \phi(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であるから、

$$\phi(1) + \phi(-1) = 0$$

となる。以上より、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{2\log(\sqrt{2}+1) + \pi}{4\sqrt{2}}$$

となるから、

$$G(x) = \frac{2\log x + \pi}{4\sqrt{2}}$$

とすれば、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx = G(\sqrt{2}+1)$$

となる。

(答) $G(x) = \frac{2\log x + \pi}{4\sqrt{2}}$

(3)

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx$$

となる。ここで右辺第2項について、 $\pi - x = u$ と置換したあと、 u を x に置き換えると、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi-u) \sin(\pi-u)}{1 + \cos^4(\pi-u)} (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-u) \sin u}{1 + \cos^4 u} du \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{1 + \cos^4 u} du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \sin u}{1 + \cos^4 u} du \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x} dx \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

(3)の結果より、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x} dx \\ &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{1 + \cos^4 x} dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos x)'}{1 + \cos^4 x} dx \end{aligned}$$

であるから、 $\cos x = t$ と置換すると

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x} dx = \pi \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$$

となる。よって、(2)の結果より

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx = \pi G(\sqrt{2}+1) = \frac{2\pi \log(\sqrt{2}+1) + \pi^2}{4\sqrt{2}}$$

となる。

(答) $\frac{2\pi \log(\sqrt{2}+1) + \pi^2}{4\sqrt{2}}$

[IV]

(1)

ド・モアブルの定理より,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 = \cos 7\theta + i \sin 7\theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、二項定理より

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^7 &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{7-k} \\ &= \sum_{k=0}^7 i^{7-k} \cdot {}_7C_k \cos^k \theta \sin^{7-k} \theta \end{aligned}$$

であるから、①式の両辺について虚部を比較すると、

$$\begin{aligned} i^7 \cdot {}_7C_0 \sin^7 \theta + i^5 \cdot {}_7C_2 \cos^2 \theta \sin^5 \theta + i^3 \cdot {}_7C_4 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + i \cdot {}_7C_6 \cos^6 \theta \sin \theta &= i \sin 7\theta \\ \therefore \sin 7\theta &= 7 \cos^6 \theta \sin \theta - 35 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + 21 \cos^2 \theta \sin^5 \theta - \sin^7 \theta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin 7\theta = 7 \cos^6 \theta \sin \theta - 35 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + 21 \cos^2 \theta \sin^5 \theta - \sin^7 \theta$$

(2)

$\sin \theta \neq 0$ と仮定して、(1)の結果の両辺を $\sin^7 \theta$ でわると、

$$\begin{aligned} \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta} &= 7 \cdot \frac{\cos^6 \theta}{\sin^6 \theta} - 35 \cdot \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} + 21 \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1 \\ \therefore \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta} &= 7(\tan^2 \theta)^{-3} - 35(\tan^2 \theta)^{-2} + 21(\tan^2 \theta)^{-1} - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta = \frac{\pi}{7}$ とすると、これは $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ を満たし、

$$0 = 7\left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-3} - 35\left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-2} + 21\left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-1} - 1$$

となるから、 $x = \left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-1}$ は与えられた3次方程式の解である。同様に $\theta = \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ とするこ

とで、 $x = \left(\tan^2 \frac{2\pi}{7}\right)^{-1}, \left(\tan^2 \frac{3\pi}{7}\right)^{-1}$ も与えられた3次方程式の解であると分かる。ここで、

$\tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加であるから、 $\tan \frac{\pi}{7}, \tan \frac{2\pi}{7}, \tan \frac{3\pi}{7}$ はすべて異なる。した

がって、 $\tan x > 0$ であることに注意すると、 $\left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-1}, \left(\tan^2 \frac{2\pi}{7}\right)^{-1}, \left(\tan^2 \frac{3\pi}{7}\right)^{-1}$ もすべて異なる値である。3次方程式の解の個数は高々3個であるから、これらが求める解である。

$$(\text{答}) \quad x = \left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-1}, \left(\tan^2 \frac{2\pi}{7}\right)^{-1}, \left(\tan^2 \frac{3\pi}{7}\right)^{-1}$$

(3)

(2)の結果を用いると、3次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \left(\tan^2 \frac{\pi}{7}\right)^{-1} + \left(\tan^2 \frac{2\pi}{7}\right)^{-1} + \left(\tan^2 \frac{3\pi}{7}\right)^{-1} &= \frac{35}{7} = 5 \\ \therefore \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2 \frac{3\pi}{7}} &= 5 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2 \frac{3\pi}{7}} = 5$$