

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	$\frac{173}{347}$
(2)	$\frac{\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)}{2}$
(3)	$\frac{\sqrt{11}}{2}$
(4)	$\frac{1}{4}$

〔解説〕

(1)

ユークリッドの互除法から

$$298767=2\times148953+861$$

$$148953=173\times861$$

より、298767と148953の最大公約数は861とわかる。よって

$$\begin{aligned}\frac{148953}{298767}&=\frac{173\times861}{2\times(173\times861)+861}\\&=\frac{173}{347}\end{aligned}$$

と約分できる。

(2)

$\cos x=t$ と置換すると

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x$$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	0

となるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos 2x}dx&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2\cos^2x-1}dx\\&=-\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{1}{2t^2-1}dt\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(\sqrt{2}t-1)(\sqrt{2}t+1)}dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}t-1}-\frac{1}{\sqrt{2}t+1}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\sqrt{2}t-1|-\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\sqrt{2}t+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{-1}{1}\right|\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}-1)^2\\&=\frac{\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)}{2}\end{aligned}$$

と導ける。

(3)

$\vec{b}=\overrightarrow{AB}, \vec{c}=\overrightarrow{AC}, \vec{d}=\overrightarrow{AD}$ とすると

$$|\vec{b}|=1, |\vec{c}|=\sqrt{2}, |\vec{d}|=2\sqrt{2}, \vec{b}\cdot\vec{c}=1, \vec{c}\cdot\vec{d}=2, \vec{d}\cdot\vec{b}=0$$

となる。4点を通る球の中心をOとすると、実数 s, t, u を用いて

$$\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

とすることができる。また、線分AB, AC, ADの中点をそれぞれL, M, Nとすると、 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OAD$ はそれぞれ $OA=OB$, $OA=OC$, $OA=OD$ を満たす二等辺三角形であるから、

$$\begin{cases}\text{OL}\perp\text{AB} \\ \text{OM}\perp\text{AC} \\ \text{ON}\perp\text{AD}\end{cases}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\overrightarrow{\text{OL}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0 \\ \overrightarrow{\text{OM}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=0 \\ \overrightarrow{\text{ON}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=0\end{cases} \\&\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\overrightarrow{\text{AO}}\right)\cdot\vec{b}=0 \\ \left(\frac{1}{2}\vec{c}-\overrightarrow{\text{AO}}\right)\cdot\vec{c}=0 \\ \left(\frac{1}{2}\vec{d}-\overrightarrow{\text{AO}}\right)\cdot\vec{d}=0\end{cases} \\&\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}|\vec{b}|^2-s|\vec{b}|^2-t\vec{c}\cdot\vec{b}-u\vec{d}\cdot\vec{b}=0 \\ \frac{1}{2}|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}-t|\vec{c}|^2-u\vec{d}\cdot\vec{c}=0 \\ \frac{1}{2}|\vec{d}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{d}-t\vec{c}\cdot\vec{d}-u|\vec{d}|^2=0\end{cases} \\&\Leftrightarrow\begin{cases}s+t-\frac{1}{2}=0 \\ s+2t+2u-1=0 \\ 2t+8u-4=0\end{cases}\end{aligned}$$

と連立方程式が得られる。これを解くと

$$s=\frac{3}{2}, t=-1, u=\frac{3}{4}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{AO}}|^2&=\left|\frac{3}{2}\vec{b}-\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right|^2\\&=\frac{9}{4}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{9}{16}|\vec{d}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{9}{4}\vec{b}\cdot\vec{d}\\&=\frac{11}{4} \\&\therefore|\overrightarrow{\text{AO}}|=\frac{\sqrt{11}}{2}\end{aligned}$$

が導かれ、球の半径は $\frac{\sqrt{11}}{2}$ である。

(4)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\&=\frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\end{aligned}$$

である。相加・相乗平均の性質より、

$$e^x+e^{-x}\geq2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$$

という不等式が成立し、等号は $x=0$ のとき確かに成立する。よって、 $f'(x)$ は $x=0$ のとき最大値

$$f'(0)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

を取る。

〔Ⅱ〕

(1)

三角関数の和積公式より

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \\ &= 2\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2} \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2} \\ &= 2\cos kx \times \sin\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

となる。

(答) $X:kx, Y:\frac{1}{2}x$

(2)

与式より

$$\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} \left\{ \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=1}^m 2\cos kx \sin\frac{1}{2}x \right\}$$

となる。ここで中括弧内を

$$A = \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=1}^m 2\cos kx \sin\frac{1}{2}x$$

とにおいて、(1)を用いて変形すると

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=1}^m \left\{ \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \right\} \\ &= \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \left[\left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x \right) + \cdots + \left\{ \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x \right\} \right] \\ &= \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \left\{ \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x \right\} \\ &= \sin\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

が得られる。よって与式は

$$\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

$\sin\frac{1}{2}x=0$ のとき、整数 l を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= l\pi \\ \Leftrightarrow x &= 2l\pi \end{aligned}$$

となるから、 $\cos kx=1$ である。従って

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=1}^n (n+1-k) \\ &= n+(n-1)+\cdots+1 \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

と表せるから、

$$g_n(x) \geq -\frac{n+1}{2}$$

が成り立つ。 $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} g_n(x) &= n\cos x + (n-1)\cos 2x + \cdots + \cos nx \\ &= \cos x + (\cos x + \cos 2x) + \cdots + (\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \cos kx \end{aligned}$$

となる。(2)より

$$\sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$$

であるから、三角関数の積和公式を用いて、

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x \sin\frac{1}{2}x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{n}{2} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{-\frac{1}{2}\{\cos(m+1)x - \cos mx\}}{2\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} - \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \\ &\geq -\frac{n+1}{2} \quad (\because \frac{1-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} \geq 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、つねに

$$g_n(x) \geq -\frac{n+1}{2}$$

が成り立つ。

(証明終)

【Ⅲ】

(1)

勝負がつかないのは、コインを2回投げて表が2回出る場合と裏が2回出る場合で、その確

率はそれぞれ $p^2, (1-p)^2$ である。よって、1回で勝負がつかない確率は

$$p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

である。2*n*回投げてAが勝つ確率は、*n*-1回勝負がつかなかった後に、コインが表裏で出る場合であるから

$$(2p^2 - 2p + 1)^{n-1} \cdot p(1-p)$$

となる。2*n*回投げてBが勝つ確率は、*n*-1回勝負がつかなかった後に、コインが裏表で出る場合であるから

$$(2p^2 - 2p + 1)^{n-1} \cdot (1-p)p$$

となる。よって、2つの確率は等しい。

(証明終)

(2)

2*n*回コインを投げて勝敗がつかない確率は

$$(2p^2 - 2p + 1)^n$$

であるから、2*n*回以下で勝敗がつく確率は

$$1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$$

となる。

$$(答) 1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$$

(3)

$0 < 2p^2 - 2p + 1 < 1$ より、 $1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$ が最大になるのは、 $2p^2 - 2p + 1$ が最小になるとき

である。これを平方完成すると

$$2p^2 - 2p + 1 = 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

となるから、 $2p^2 - 2p + 1$ は $p = \frac{1}{2}$ のとき最小値になる。よって、 $1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$ は $p = \frac{1}{2}$ で

最大になる。

(証明終)

(4)

x は $0 < x < 1$ を満たす実数であるから、 $0 < h$ を満たす実数 *h* を用いて

$$x = \frac{1}{1+h}$$

と表せる。*n* ≥ 2 のとき、

$$\begin{aligned} nx^n &= \frac{n}{(1+h)^n} \\ &= \frac{n}{{}_nC_0 + {}_nC_1h + {}_nC_2h^2 + \cdots + {}_nC_nh^n} \\ &< \frac{n}{{}_nC_2h^2} \\ &= \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2} \\ &= \frac{2}{(n-1)h^2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$0 < nx^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

と表され

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$$

より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$$

となる。

(証明終)

(5)

n ≥ 2 のとき、コインをちょうど2*n*回投げて勝負がつく確率は、

$$\begin{aligned} a_n &= (2p^2 - 2p + 1)^{n-1} \cdot 2p(1-p) \\ &= (2p^2 - 2p + 1)^{n-1} (2p - 2p^2) \end{aligned}$$

である。ここで

$$q = 2p^2 - 2p + 1$$

とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2ia_i &= 2 \sum_{i=1}^n iq^{i-1} (1-q) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (iq^{i-1} - iq^i) \\ &= 2 \{ (q^0 - q^1) + (2q^1 - 2q^2) + (3q^2 - 3q^3) + \cdots + (nq^{n-1} - nq^n) \} \\ &= 2 (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n) \\ &= 2 \left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n \right) \end{aligned}$$

となる。(4)を用いると、 $0 < q < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$$

となり、また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2ia_n &= \frac{2}{1-q} \\ &= \frac{2}{2p - 2p^2} \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2ia_n = \frac{1}{p(1-p)}$$

〔Ⅳ〕

(1)

$P(t)$ を

$$P(t)=\frac{\kappa}{\gamma}+\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}$$

とすると

$$\begin{aligned} P'(t) &= -\gamma\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} \\ &= \kappa-\left\{\kappa+\gamma\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}\right\} \\ &= \kappa-\gamma\left\{\frac{\kappa}{\gamma}+\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}\right\} \\ &= \kappa-\gamma P(t) \end{aligned}$$

となり、方程式(*)を満たす。従って、

$$P(t)=\frac{\kappa}{\gamma}+\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}$$

は方程式(*)の解である。

(証明終)

(2)

$$P(3)=11.0, P(9)=17.0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha+(5.0-\alpha)e^{-3\gamma}=11.0 \\ \alpha+(5.0-\alpha)e^{-9\gamma}=17.0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} e^{-3\gamma}=\frac{11.0-\alpha}{5.0-\alpha} \\ e^{-9\gamma}=\frac{17.0-\alpha}{5.0-\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $e^{-3\gamma}>0, e^{-9\gamma}>0$ より、 α は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{11.0-\alpha}{5.0-\alpha}>0 \\ \frac{17.0-\alpha}{5.0-\alpha}>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\alpha<5.0, 17.0<\alpha \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。 $e^{-9\gamma}=\left(e^{-3\gamma}\right)^3$ より

$$\begin{aligned} \frac{17-\alpha}{5-\alpha} &= \left(\frac{11-\alpha}{5-\alpha}\right)^3 \\ (17-\alpha)(5-\alpha)^2 &= (11-\alpha)^3 \\ \Leftrightarrow \alpha^2-28\alpha+151 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 14\pm 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。 $5<14-3\sqrt{5}<17$ であることに注意すれば、求める α は

$$\alpha=14+3\sqrt{5}$$

である。

(答) $\alpha=14+3\sqrt{5}$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned} 11 &= 14+3\sqrt{5}+\left\{5-\left(14+3\sqrt{5}\right)\right\}e^{-3\gamma} \\ \Leftrightarrow e^{-3\gamma} &= \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow e^{-3\gamma} &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \Leftrightarrow -3\gamma &= \log\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{3}\log\frac{2}{\sqrt{5}-1} \\ \therefore \gamma &= \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\gamma=\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(4)

$$\alpha=14+3\sqrt{5}, e^{-3\gamma}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} P(6) &= 14+3\sqrt{5}+\left\{5-\left(14+3\sqrt{5}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &= 8+3\sqrt{5} \end{aligned}$$

と導ける。

(答) $P(6)=8+3\sqrt{5}$