

【Ⅰ】

【解答】

(1)	$\frac{173}{347}$
(2)	$\frac{\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)}{2}$
(3)	$\frac{\sqrt{11}}{2}$
(4)	$\frac{1}{4}$

【解説】

(1)

ユークリッドの互除法から

$$\begin{aligned}298767 &= 2 \times 148953 + 861 \\148953 &= 173 \times 861\end{aligned}$$

より、298767 と 148953 の最大公約数は 861 とわかる。よって

$$\begin{aligned}\frac{148953}{298767} &= \frac{173 \times 861}{2 \times (173 \times 861) + 861} \\&= \frac{173}{347}\end{aligned}$$

と約分できる。

(2)

$\cos x = t$ と置換すると

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{dt}{dx} & = & -\sin x & \\ \hline x & \frac{\pi}{3} & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{1}{2} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 \cos^2 x - 1} dx \\&= -\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{2t^2 - 1} dt \\&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1)} dt \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}t - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}t + 1} \right) dt \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \log |\sqrt{2}t - 1| - \frac{1}{\sqrt{2}} \log |\sqrt{2}t + 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{-1}{1} \right| \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log (\sqrt{2} - 1)^2 \\&= \frac{\sqrt{2} \log (\sqrt{2} - 1)}{2}\end{aligned}$$

と導ける。

(3)

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とすると

$$|\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \sqrt{2}, |\vec{d}| = 2\sqrt{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 1, \vec{c} \cdot \vec{d} = 2, \vec{d} \cdot \vec{b} = 0$$

となる。4 点を通る球の中心を O とすると、実数 s, t, u を用いて

$$\overrightarrow{AO} = s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

とすることができる。また、線分 AB, AC, AD の中点をそれぞれ L, M, N とすると、 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OAD$ はそれぞれ $OA = OB$, $OA = OC$, $OA = OD$ を満たす二等辺三角形であるから、

$$\begin{cases} OL \perp AB \\ OM \perp AC \\ ON \perp AD \end{cases}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \overrightarrow{AO} \right) \cdot \vec{b} = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \overrightarrow{AO} \right) \cdot \vec{c} = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\vec{d} - \overrightarrow{AO} \right) \cdot \vec{d} = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - s|\vec{b}|^2 - t\vec{c} \cdot \vec{b} - u\vec{d} \cdot \vec{b} = 0 \\ \frac{1}{2}|\vec{c}|^2 - s\vec{b} \cdot \vec{c} - t|\vec{c}|^2 - u\vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \\ \frac{1}{2}|\vec{d}|^2 - s\vec{b} \cdot \vec{d} - t\vec{c} \cdot \vec{d} - u|\vec{d}|^2 = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} s + t - \frac{1}{2} = 0 \\ s + 2t + 2u - 1 = 0 \\ 2t + 8u - 4 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

と連立方程式が得られる。これを解くと

$$s = \frac{3}{2}, t = -1, u = \frac{3}{4}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AO}|^2 &= \left| \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d} \right|^2 \\&= \frac{9}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{9}{16}|\vec{d}|^2 - 3\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{3}{2}\vec{c} \cdot \vec{d} + \frac{9}{4}\vec{b} \cdot \vec{d} \\&= \frac{11}{4} \\&\therefore |\overrightarrow{AO}| = \frac{\sqrt{11}}{2}\end{aligned}$$

が導かれ、球の半径は $\frac{\sqrt{11}}{2}$ である。

(4)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\&= \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}\end{aligned}$$

である。相加・相乗平均の性質より、

$$e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$$

という不等式が成立し、等号は $x = 0$ のとき確かに成立する。よって、 $f'(x)$ は $x = 0$ のとき最大値

$$f'(0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

を取る。

〔Ⅱ〕

(1)

三角関数の和積公式より

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x \\ &= 2\cos\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)x + \left(k - \frac{1}{2}\right)x}{2} \sin\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \left(k - \frac{1}{2}\right)x}{2} \\ &= 2\cos kx \times \sin\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

となる。

(答) $X : kx, Y : \frac{1}{2}x$

(2)

与式より

$$\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} \left\{ \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=1}^m 2\cos kx \sin\frac{1}{2}x \right\}$$

となる。ここで中括弧内を

$$A = \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=1}^m 2\cos kx \sin\frac{1}{2}x$$

とにおいて、(1)を用いて変形すると

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sum_{k=1}^m \left\{ \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x \right\} \\ &= \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \left[\left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x \right) + \cdots + \left\{ \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)x \right\} \right] \\ &= \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \left\{ \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x \right\} \\ &= \sin\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

が得られる。よって与式は

$$\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

$\sin\frac{1}{2}x = 0$ のとき、整数 l を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= l\pi \\ \Leftrightarrow x &= 2l\pi \end{aligned}$$

となるから、 $\cos kx = 1$ である。従って

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=1}^n (n+1-k) \\ &= n + (n-1) + \cdots + 1 \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

と表せるから、

$$g_n(x) \geq -\frac{n+1}{2}$$

が成り立つ。 $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} g_n(x) &= n\cos x + (n-1)\cos 2x + \cdots + \cos nx \\ &= \cos x + (\cos x + \cos 2x) + \cdots + (\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \cos kx \end{aligned}$$

となる。(2)より

$$\sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$$

であるから、三角関数の積和公式を用いて、

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x \sin\frac{1}{2}x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{n}{2} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{-\frac{1}{2}\{\cos(m+1)x - \cos mx\}}{2\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} - \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \\ &\geq -\frac{n+1}{2} \quad (\because \frac{1 - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} \geq 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、つねに

$$g_n(x) \geq -\frac{n+1}{2}$$

が成り立つ。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

勝負がつかないのは、コインを2回投げて表が2回出る場合と裏が2回出る場合で、その確

率はそれぞれ $p^2, (1-p)^2$ である。よって、1回で勝負がつかない確率は

$$p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

である。2*n*回投げてAが勝つ確率は、*n*-1回勝負がつかなかった後に、コインが表裏で出る場合であるから

$$(2p^2 - 2p + 1)^{n-1} \cdot p(p-1)$$

となる。2*n*回投げてBが勝つ確率は、*n*-1回勝負がつかなかった後に、コインが裏表で出る場合であるから

$$(2p^2 - 2p + 1)^{n-1} \cdot (p-1)p$$

となる。よって、2つの確率は等しい。

(証明終)

(2)

2*n*回コインを投げて勝敗がつかない確率は

$$(2p^2 - 2p + 1)^n$$

であるから、2*n*回以下で勝敗がつく確率は

$$1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$$

となる。

$$(答) 1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$$

(3)

$0 < 2p^2 - 2p + 1 < 1$ より、 $1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$ が最大になるのは、 $2p^2 - 2p + 1$ が最小になるとき

である。これを平方完成すると

$$2p^2 - 2p + 1 = 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

となるから、 $2p^2 - 2p + 1$ は $p = \frac{1}{2}$ のとき最小値になる。よって、 $1 - (2p^2 - 2p + 1)^n$ は $p = \frac{1}{2}$ で

最大になる。

(証明終)

(4)

x は $0 < x < 1$ を満たす実数であるから、 $0 < h$ を満たす実数 *h* を用いて

$$x = \frac{1}{1+h}$$

と表せる。*n* ≥ 2 のとき、

$$\begin{aligned} nx^n &= \frac{n}{(1+h)^n} \\ &= \frac{n}{{}_nC_0 + {}_nC_1h + {}_nC_2h^2 + \cdots + {}_nC_nh^n} \\ &< \frac{n}{{}_nC_2h^2} \\ &= \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2} \\ &= \frac{2}{(n-1)h^2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$0 < nx^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

と表され

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$$

より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$$

となる。

(証明終)

(5)

n ≥ 2 のとき、コインをちょうど2*n*回投げて勝負がつく確率は、

$$\begin{aligned} a_n &= (2p^2 - 2p + 1)^{n-1} \cdot 2p(1-p) \\ &= (2p^2 - 2p + 1)^{n-1} (2p - 2p^2) \end{aligned}$$

である。ここで

$$q = 2p^2 - 2p + 1$$

とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2ia_i &= 2 \sum_{i=1}^n iq^{i-1} (1-q) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (iq^{i-1} - iq^i) \\ &= 2 \{ (q^0 - q^1) + (2q^1 - 2q^2) + (3q^2 - 3q^3) + \cdots + (nq^{n-1} - nq^n) \} \\ &= 2 (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n) \\ &= 2 \left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n \right) \end{aligned}$$

となる。(4)を用いると、 $0 < q < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$$

となり、また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2ia_n &= \frac{2}{1-q} \\ &= \frac{2}{2p - 2p^2} \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2ia_n = \frac{1}{p(1-p)}$$

〔Ⅳ〕

(1)

$P(t)$ を

$$P(t)=\frac{\kappa}{\gamma}+\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}$$

とすると

$$\begin{aligned} P'(t) &= -\gamma\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} \\ &= \kappa - \left\{ \kappa + \gamma\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} \right\} \\ &= \kappa - \gamma\left\{ \frac{\kappa}{\gamma} + \left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} \right\} \\ &= \kappa - \gamma P(t) \end{aligned}$$

となり，方程式(*)を満たす。従って，

$$P(t)=\frac{\kappa}{\gamma}+\left(P_0-\frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}$$

は方程式(*)の解である。

(証明終)

(2)

$$P(3)=11.0, P(9)=17.0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha+(5.0-\alpha)e^{-3\gamma}=11.0 \\ \alpha+(5.0-\alpha)e^{-9\gamma}=17.0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} e^{-3\gamma}=\frac{11.0-\alpha}{5.0-\alpha} \\ e^{-9\gamma}=\frac{17.0-\alpha}{5.0-\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで， $e^{-3\gamma}>0, e^{-9\gamma}>0$ より， α は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{11.0-\alpha}{5.0-\alpha}>0 \\ \frac{17.0-\alpha}{5.0-\alpha}>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\alpha<5.0, 17.0<\alpha \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。 $e^{-9\gamma}=\left(e^{-3\gamma}\right)^3$ より

$$\begin{aligned} \frac{17-\alpha}{5-\alpha} &= \left(\frac{11-\alpha}{5-\alpha}\right)^3 \\ (17-\alpha)(5-\alpha)^2 &= (11-\alpha)^3 \\ \Leftrightarrow \alpha^2-28\alpha+151 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 14\pm3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。 $5<14-3\sqrt{5}<17$ であることに注意すれば，求める α は

$$\alpha=14+3\sqrt{5}$$

である。

(答) $\alpha=14+3\sqrt{5}$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned} 11 &= 14+3\sqrt{5}+\left\{5-(14+3\sqrt{5})\right\}e^{-3\gamma} \\ \Leftrightarrow e^{-3\gamma} &= \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow e^{-3\gamma} &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \Leftrightarrow -3\gamma &= \log\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{3}\log\frac{2}{\sqrt{5}-1} \\ \therefore \gamma &= \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\gamma=\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(4)

$$\alpha=14+3\sqrt{5}, e^{-3\gamma}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} P(6) &= 14+3\sqrt{5}+\left\{5-(14+3\sqrt{5})\right\}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &= 8+3\sqrt{5} \end{aligned}$$

と導ける。

(答) $P(6)=8+3\sqrt{5}$