

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	$(p, q) = (3, 2), (2, 3)$
(2)	$x = -\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
(3)	$\frac{\beta \cdot (2\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta + 2\gamma)}{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma)}$
(4)	58桁, 最高位の数3

(1)

式の対称性より、 $p \geq q$ として一般性を失わない。このとき、

$$p^3 + q^3 \geq 2q^3$$

$$\Leftrightarrow q^3 \leq \frac{35}{2}$$

となり、 q は素数であるので $q = 2$ である。

$$\begin{aligned} p^3 &= 35 - q^3 \\ &= 35 - 2^3 \\ &= 27 \end{aligned}$$

であることから、 $p = 3$ である。 $p < q$ のとき、同様にして $p = 2, q = 3$ である。

(2)

$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = 1 - 2x^2$ であり、 x が実数であることより、(左辺) ≥ 0 であるから、 $1 - 2x^2 \geq 0$ となる。

したがって

$$1 - 2x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

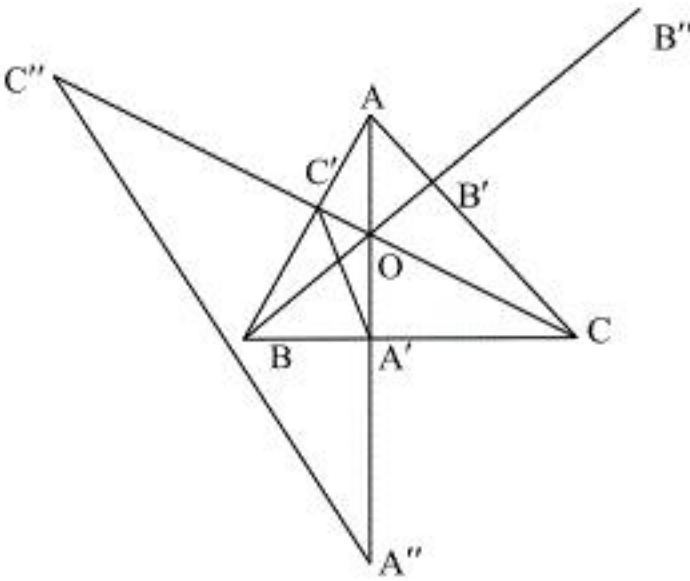
となる。また、与式の両辺を二乗すると

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{2} &= (1 - 2x^2)^2 \\ \Leftrightarrow 8x^4 - 8x^2 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(8x^3 + 8x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(2x+1)(4x^2 + 2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x-1)(2x+1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって $\frac{1+x}{2} = (1 - 2x^2)^2$ の解は $x = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ である。これらのうち $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x$

$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす実数 x は、 $x = -\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ であり、これが求めるべき解である。

(3)



$\triangle OBC = \alpha$, $\triangle OCA = \beta$, $\triangle OAB = \gamma$ であることから

$$OA' : OA = \triangle OBC : (\triangle OAB + \triangle OAC) = \alpha : (\beta + \gamma)$$

$$OC' : OC = \triangle OAB : (\triangle OBC + \triangle OAC) = \gamma : (\alpha + \beta)$$

である。よって

$$\begin{aligned} \triangle OA'C' &= \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OC'}{OC} \cdot \triangle OAC \\ &= \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \cdot \beta \end{aligned}$$

である。 $AA' = A'A''$, $CC' = C'C''$ より、

$$OA' : OA'' = \alpha : (2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$OC' : OC'' = \gamma : (\alpha + \beta + 2\gamma)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \triangle OA''C'' &= \frac{2\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{\gamma} \cdot \triangle OA'C' \\ &= \frac{(2\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta + 2\gamma)}{\alpha\gamma} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\beta \cdot (2\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta + 2\gamma)}{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma)} \end{aligned}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned} \log_{10} 6^{74} &= 74 \log_{10} 6 \\ &= 74 \cdot 0.7782 \\ &= 57.5868 \end{aligned}$$

であることから、 $57 < \log_{10} 6^{74} < 58$ である。したがって 6^{74} は58桁である。また、 6^{74} の最高位の数字を a (a は $1 \leq a \leq 9$ となる自然数)とすると、 $a \cdot 10^{57} \leq 6^{74} < (a+1) \cdot 10^{57}$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \log_{10} (a \cdot 10^{57}) &\leq \log_{10} 6^{74} < \log_{10} (a+1) \cdot 10^{57} \\ \Leftrightarrow \log_{10} a + 57 &\leq 57.5868 < \log_{10} (a+1) + 57 \\ \Leftrightarrow \log_{10} a &\leq 0.5868 < \log_{10} (a+1) \end{aligned}$$

となる。これを満たす a は $a = 3$ である。

〔Ⅱ〕

(1)

$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ であることから、

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x + 2$$

である。

$$12x^2 - 6x + 2 = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} > 0$$

であることから、 $f''(x) > 0$ である。したがって $f'(x)$ は単調増加である。また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$$

であることから、方程式 $f'(x) = 0$ はただ1つの実数解を持つ。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 - 1 \\ &= -\frac{1}{4} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{3}{4}\right) &= 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \\ &= \frac{27}{16} - \frac{27}{16} + \frac{3}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるので、 $f'(x)$ が単調増加であることから $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq \frac{3}{4}$ である。したがって $a = \frac{1}{2}$ は条件を満たす実数 a の1つである。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(3)

$f'(x)$ は単調増加であることから、関数 $f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	...	x_0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗

したがって、(2)より、 $x_0 \neq \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x_0) &< f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^4 - x_0^3 + x_0^2 - x_0 + 1 \\ &= (4x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1) \cdot \left(\frac{1}{4}x_0 - \frac{1}{16}\right) + \frac{5}{16}x_0^2 - \frac{5}{8}x_0 + \frac{15}{16} \\ &= \frac{5}{16}(x_0^2 - 2x_0 + 3) \\ &= \frac{5}{16}\{(x_0 - 1)^2 + 2\} \\ &> \frac{5}{8} \end{aligned}$$

である。これより、 $\frac{5}{8} < f(x_0) < \frac{11}{16}$ が示された。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

n は素数ではない 4 以上の整数であることから、

$$n = pq \quad (p, q \text{ は } 1 \text{ ではない自然数})$$

と表すことができる。 $n^2 = p^2 q^2$ であることから、 $p^2 q$ は n^2 の約数である。

$$p^2 q > pq = n$$

となるので、 $n < d < n^2$ となる n^2 の約数 d は存在する。

(証明終)

(2)

二項定理より、

$$\sum_{k=0}^{101} {}_{101}C_k = 2^{101}$$

である。また、

$${}_{101}C_k = {}_{101}C_{101-k}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{50} {}_{101}C_k &= \sum_{k=0}^{50} {}_{101}C_{101-k} \\ &= \sum_{k=51}^{101} {}_{101}C_k \end{aligned}$$

である。したがって

$$\sum_{k=0}^{50} {}_{101}C_k = \frac{2^{101}}{2} = 2^{100}$$

である。よって $\sum_{k=0}^{50} {}_{101}C_k$ の正の約数の個数は 101 個であり、負の約数も同じ数だけ存在するの

で、約数は全部で、 $101 \times 2 = 202$ 個存在する。

(答) 202 個

(3)

(ア)

集合 D の要素は X の約数ではなく、 X^2 の約数であり、 X より小さい整数であるので、

$$D = \overline{A} \cap B \cap C$$

である。

(答) $D = \overline{A} \cap B \cap C$

(イ)

(2)と同様に考えると、

$$\begin{aligned} X &= 3^4 \cdot ({}_1C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5) \\ &= 3^4 \cdot \sum_{k=0}^5 {}_{11}C_k \\ &= 3^4 \cdot \frac{2^{11}}{2} \\ &= 2^{10} \cdot 3^4 \end{aligned}$$

である。したがって X の正の約数は

$$(10+1) \cdot (4+1) = 11 \cdot 5 = 55 \text{ (個)}$$

であり、そのうち X より小さいものは 54 個である。また、 $X^2 = 2^{20} \cdot 3^8$ であるため、 X^2 の正の約数は

$$(20+1) \cdot (8+1) = 21 \cdot 9 = 189 \text{ (個)}$$

である。ところで、 X^2 の 2 つの約数 a, b について、 $ab = X^2$ が成り立つとき、 $a < X$ であれば $X < b$ であり、その逆も成立する。したがって 1 以上 X 未満の範囲にある X^2 の約数の個数と、 X より大きく X^2 以下の範囲にある X^2 の約数の個数は等しい。 X は X^2 の約数であることから、 X より小さい X^2 の約数の個数は

$$\frac{189-1}{2} = 94 \text{ (個)}$$

である。 X の約数は同時に X^2 の約数でもあるため、 D の要素の個数は

$$94 - 54 = 40 \text{ (個)}$$

である。

(答) 40 個

〔Ⅳ〕

(1)

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

である。

$$(答) \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \end{aligned}$$

である。 $t = \sin x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ であり,

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{1 - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (\log(1 + t) - \log(1 - t)) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。

$$(答) \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

(1)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx &= \tan x \cdot \frac{1}{\cos^{2n-1} x} - \int \tan x \cdot (-2n+1) \frac{-\sin x}{\cos^{2n} x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x} - (2n-1) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x} - (2n-1) \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x} - (2n-1) \int \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx + (2n-1) \int \frac{1}{\cos^{2n-1} x} dx \end{aligned}$$

となるから,

$$2n \int \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx = \frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x} + (2n-1) \int \frac{1}{\cos^{2n-1} x} dx$$

である。

(証明終)

(4)

(3)において $n=1$ を代入すると,

$$2 \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} + \int \frac{1}{\cos x} dx$$

であるので, (2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx &= \left[\frac{\tan x}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \sqrt{2} + \left[\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

である。したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + 1)$$

である。

$$(答) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + 1)$$