

【Ⅰ】

【解答】

| (1)    | (2)                                  | (3) | (4)                                 |
|--------|--------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 48, 80 | $\frac{2}{5 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1}$ | 2   | $b = \frac{5}{2}, c = \frac{9}{16}$ |

【解説】

(1)

一般に、2以上の自然数  $n$  が  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$  と素因数分解できるとき(ただし、 $p_1, \dots, p_k$  は相異なる素数、 $a_1, \dots, a_k$  は自然数)、 $n$  の正の約数の個数は

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

である。そのため、 $n$  の正の約数の個数が10個のとき、 $10 = 10 \cdot 1 = 5 \cdot 2$  であることから、

$$n = p_1^9, p_1^4 p_2$$

と表せる。

[1]  $n = p_1^9$  のとき

$n$  は最小で  $2^9 = 512$  であり、2桁の自然数  $n$  は存在しない。

[2]  $n = p_1^4 p_2$  のとき

$p_1 = 2$  とすると、 $p_2 = 3$  のとき  $2^4 \cdot 3 = 48$ 、 $p_2 = 5$  のとき  $2^4 \cdot 5 = 80$  であり、これらは2桁である。 $p_2 \geq 7$  のとき、

$$n \geq 2^4 \cdot 7 = 112$$

となり、3桁以上になるので不適である。また、 $p_1 \geq 3$  のとき、

$$n \geq 3^4 \cdot 2 = 162$$

となり、不適である。したがって、 $n = p_1^4 p_2$  のときに題意を満たす  $n$  は48, 80である。

以上[1], [2]より、求める  $n$  は48, 80である。

(2)

漸化式の形から、 $a_n \neq 0$  ならば  $a_{n+1} \neq 0$  となるので、 $a_1 \neq 0$  より、帰納的にすべての  $n$  で

$a_n \neq 0$  であることがわかる。そこで、漸化式の両辺の逆数を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{2na_n + 3}{a_n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{3}{a_n} + 2n \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、①は

$$\frac{1}{a_{n+1}} + n + 1 + \frac{1}{2} = 3 \left( \frac{1}{a_n} + n + \frac{1}{2} \right)$$

と変形できる。これより、数列  $\left\{ \frac{1}{a_n} + n + \frac{1}{2} \right\}$  は初項  $\frac{1}{a_1} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ 、公比3の等比数列であるから、

ら、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} + n + \frac{1}{2} &= \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} \\ \therefore a_n &= \frac{2}{5 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1} \end{aligned}$$

となる。

(3)

倍角の公式より、

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$$

が成り立つ。これを変形すると、

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{12} - 1 &= 0 \\ \therefore \tan \frac{\pi}{12} &= 2 - \sqrt{3} \left( \because \tan \frac{\pi}{12} > 0 \right) \end{aligned}$$

を得る。同様に、

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{24}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{24}} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{24}} - 2 \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} - (2 - \sqrt{3}) = 0$$

が成り立つ。 $\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} = x$  とおくと、

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})x^2 - 2x - (2 - \sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + (2 - \sqrt{3})^2}}{2 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{2 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{3}} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{2 - \sqrt{3}} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となる。

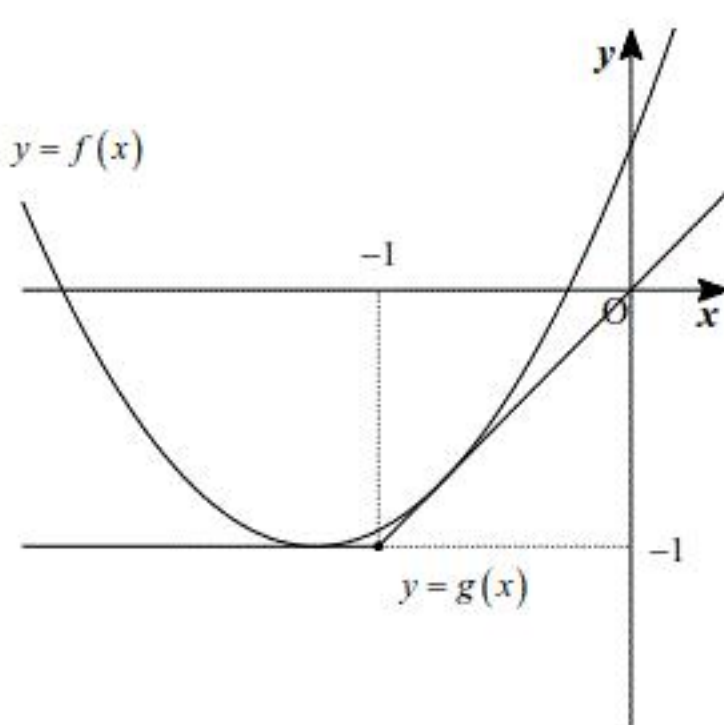
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{2 - \sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= 2 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} - \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2$  である。

(4)

$y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフが異なる2点で接するとき、 $y = f(x)$  のグラフは下図のように、

$x \leq -1$  で  $y = -1$  と、 $x > -1$  で  $y = x$  と接している。



$$f(x) = x^2 + bx + c = \left( x + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

であるから、 $x \leq -1$  で  $y = g(x)$  と接するための条件は、

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4} + c = -1 & \cdots \textcircled{1} \\ -\frac{b}{2} \leq -1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。また、 $x > -1$  で  $y = g(x)$  と接するための条件は、

$$x^2 + bx + c = x \Leftrightarrow x^2 + (b-1)x + c = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

の判別式を  $D$  とおくと、

$$D = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 - 4c = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

であり、方程式③の重解が  $x > -1$  となることである。①、④より、

$$\begin{aligned} (b-1)^2 - 4 \cdot \left( \frac{b^2}{4} - 1 \right) &= 0 \\ \therefore b &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であり、 $c = \frac{9}{16}$  である。このとき方程式③の解は  $x = -\frac{3}{4}$  であるから、 $y = f(x)$  のグラフは

$x > -1$  で  $y = x$  と接する。また、これは②も満たす。以上より、 $b = \frac{5}{2}, c = \frac{9}{16}$  である。



〔Ⅱ〕

(1)

$x, y, z > 1$  より,  $\frac{1}{x-1} > 0, \frac{1}{y} < \frac{1}{y-1}, \frac{1}{z} < \frac{1}{z-1}$  であるから,

$$\frac{xyz-1}{(x-1)yz} < \frac{xyz}{(x-1)yz} < \frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$x, y, z$  は  $3 \leq x < y < z$  を満たす奇数であるから,  $x \geq 3, y \geq 5, z \geq 7$  である。よって,

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1} \leq \frac{5}{4}$$

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1} \leq \frac{7}{6}$$

であるから,

$$\frac{xyz-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} < \frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{16} < 3$$

が成り立つ。また,  $\frac{1}{y-1} > \frac{1}{y}, \frac{1}{z-1} > \frac{1}{z}, yz > 1$  であるから,

$$\frac{xyz-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} > \frac{xyz-1}{(x-1)yz} > \frac{xyz-yz}{(x-1)yz} = 1$$

が成り立つ。したがって, 与えられた不等式が示された。

(証明終)

(3)

方程式  $g(x) = 0$  の解を  $p, q, r$  ( $3 \leq p < q < r$ ,  $p, q, r$  は奇数) とすると,  $p \geq 3, q \geq 5, r \geq 7$  である。ここで,

$$\frac{A+B+2C+2}{A+B+C+1} = 1 + \frac{C+1}{A+B+C+1}$$

であるから, 条件(ii)より  $\frac{C+1}{A+B+C+1}$  は整数である。また, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} A = -(p+q+r) \\ B = pq+qr+rp \\ C = -pqr \end{cases}$$

であるから, これを  $\frac{C+1}{A+B+C+1}$  に代入すると,

$$\frac{C+1}{A+B+C+1} = \frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

となり, (2)より,

$$1 < \frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)} < 3$$

である。ここで,  $\frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)}$  は整数であるから,

$$\frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)} = 2$$

である。これを展開して整理すると,

$$pqr - 2(pq + qr + rp) + 2(p + q + r) - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を得る。以下,  $p$  の値で場合分けして考える。

[1]  $p = 3$  のとき

$p = 3$  を①に代入すると

$$\begin{aligned} qr - 4(q+r) + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (q-4)(r-4) &= 11 \end{aligned}$$

となる。 $q-4, r-4$  はともに整数であり,  $1 \leq q-4 < r-4$  であるから,

$$\begin{aligned} q-4 &= 1, r-4 = 11 \\ \Leftrightarrow q &= 5, r = 15 \end{aligned}$$

を得る。このとき,

$$\begin{aligned} A &= -(3+5+15) = -23 \\ B &= 3 \cdot 5 + 5 \cdot 15 + 15 \cdot 3 = 135 \\ C &= -3 \cdot 5 \cdot 15 = -225 \end{aligned}$$

である。

[2]  $p \geq 5$  のとき

①を変形すると

$$p\{qr - 2(q+r) + 2\} = 2(qr - q - r) + 1$$

となる。 $q \geq 7, r \geq 9$  より

$$qr - 2(q+r) + 2 = (q-2)(r-2) - 2 > 0$$

であり,  $p \geq 5$  であるから,

$$\begin{aligned} 5\{qr - 2(q+r) + 2\} &\leq 2(qr - q - r) + 1 \\ \Leftrightarrow 3qr - 8(q+r) + 9 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (3q-8)(3r-8) &\leq 37 \end{aligned}$$

となるが,  $3q-8 \geq 13, 3r-8 \geq 19$  より, これを満たす  $q, r$  は存在しない。

以上[1], [2]より,  $A = -23, B = 135, C = -225$  である。

(答)  $A = -23, B = 135, C = -225$



### 〔Ⅲ〕

〔解答〕

|     |
|-----|
| (1) |
| 16  |

(2)

平面上の  $n$  本の直線について、平行な 2 直線も、1 点で交わる 3 直線もない・・・①という直線の引き方が存在すれば、このとき  $n$  本の直線によって作られる交点の数は最大となる。そのときの交点の数は  $n$  本の直線から 2 本の直線を選ぶ場合の数に等しくなるから、

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ (個)}$$

である。以下、数学的帰納法を用いて、2 以上の自然数  $n$  で①を満たす直線の引き方が存在することを示す。

[1]  $n=2$  のとき

平面上に平行でない 2 直線を引くことはできるから、①を満たす直線の引き方は存在する。

[2]  $n=k$  のとき

平面上に  $k$  本の直線を引くとき、①を満たす直線の引き方が存在することを仮定する。  
 $xy$  平面上に  $k$  本の直線が引かれていることを考え、それらの傾きを  $m_1, m_2, \dots, m_k$  とする。 $k+1$  本目に引く直線(以下  $l_{k+1}$  という)について、その傾き  $m_{k+1}$  を  $m_1, m_2, \dots, m_k$  と異なるように取れば、 $l_{k+1}$  は既に引かれた  $k$  本の直線のどれとも平行でない。また、既に引か

れた  $k$  本の直線の交点の数は  $\frac{k(k-1)}{2}$  個であるため、 $m_{k+1}$  を固定したとき、既存の交点

を通るような  $l_{k+1}$  の  $y$  切片の値は  $\frac{k(k-1)}{2}$  通りある。したがって、 $l_{k+1}$  の  $y$  切片が取りう

る全ての実数値のうち、 $\frac{k(k-1)}{2}$  個の数を除けばどの  $y$  切片を選んでも  $l_{k+1}$  は既に引か

れた  $k$  本の直線のうちの 2 本と同時に交わることはない。よって、①を満たすような  $l_{k+1}$  の引き方は存在するから、 $n=k+1$  のときに①を満たす直線の引き方が存在することが示された。

以上[1],[2]より、2 以上の自然数  $n$  について①を満たす直線の引き方が存在するから、求める交点の数の最大値は  $\frac{n(n-1)}{2}$  である。

$$\text{(答)} \quad \frac{n(n-1)}{2}$$

(3)

$n$  本の直線が分割する領域数の最大値を  $a_n$  とおくと、 $a_1=2, a_2=4$  である。ここで、 $n+1$  本目の直線を引くとき、他の  $n$  本のいずれの直線とも平行ではなく、どの 2 直線の交点も通らないように引くと、増える領域の数は最大となる。これは、①を満たすような  $n$  本の直線の引き方をしたときであるから、(2)より 2 以上の自然数についてこのような直線の引き方は存在することがわかる。 $n+1$  本目の直線を引くと、交点は  $n$  個増え、これらの交点を順に  $A_1, \dots, A_n$  とおく。すると、 $A_1$  から  $A_n$  とは反対側に伸びる半直線、線分  $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ 、および  $A_n$  から  $A_1$  とは反対側に伸びる半直線という計  $n+1$  本の線分および半直線が既存の領域を分割するから、領域数は  $n+1$  個増える。したがって、 $n \geq 2$  のとき、

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

が成り立つ。 $a_1=2, a_2=4$  より  $n=1$  のときもこれは成り立つから、 $n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

となる。これは  $n=1$  でも成り立つ。

$$\text{(答)} \quad \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

〔解説〕

(1)

(3)の結果に  $n=5$  を代入すれば、 $a_5=16$  より、最大で 16 個の領域に分割することができる。ことがわかる。

# 【IV】

(1)

$t = \tan x$  とおくと  $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$  であるから,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \log |t| + C \\ &= \log |\tan x| + C\end{aligned}$$

となる( $C$ は積分定数)。

$$(答) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log |\tan x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

積の微分法を用いて,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos x}{\sin^n x}\right)' &= (\cos x)' \frac{1}{\sin^n x} + \cos x \left(\frac{1}{\sin^n x}\right)' \\ &= -\frac{1}{\sin^{n+1} x} - \frac{n \cos^2 x}{\sin^{n+1} x}\end{aligned}$$

を得る。

$$(答) -\frac{1}{\sin^{n+1} x} - \frac{n \cos^2 x}{\sin^{n+1} x}$$

(3)

まず,

$$\left(-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}\right)' = \frac{(\sin x)'}{\sin^n x} = \frac{\cos x}{\sin^n x}$$

であり,

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{\sin^n x} &= \frac{\cos^2 x}{\sin^n x \cos x} \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^n x \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin^n x \cos x} - \frac{1}{\sin^{n-2} x \cos x}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって,

$$\left(-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}\right)' = \frac{1}{\sin^n x \cos x} - \frac{1}{\sin^{n-2} x \cos x}$$

であり, 両辺  $x$  で積分をして移項すると

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}$$

となる。

(証明終)

(4)

(1)を用いて,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos x} = \left[\log |\tan x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \log 3$$

であるから, (3)の式に  $n=3$  を代入すると,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} &= \left[-\frac{1}{(3-1)\sin^{3-1} x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^{3-2} x \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - 4\right) + \log 3 \\ &= \frac{4}{3} + \log 3\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \frac{4}{3} + \log 3$$