

数 学 問 題

(平成 31 年 度)

【注意事項】

1. 試験時間は 120 分 である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は 1 ページから 6 ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に 3 枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後、3 枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1 枚につき受験番号は 2 箇所、氏名は 1 箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
9. 問題は必答問題と選択問題に分かれている。

問題番号	〔Ⅰ〕	〔Ⅱ〕	〔Ⅲ〕	〔Ⅳ〕	〔Ⅴ〕
選択方法	必答	必答	いずれか 1 題を選択解答		

10. 選択問題は、解答する問題番号を、必ず該当する解答用紙の所定の欄に記入すること。
11. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
12. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び、指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。





(必答問題)

〔Ⅰ〕以下の問いに答えなさい。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 正の約数の個数が 10 個である 2 桁の自然数をすべて求めなさい。

(2) 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2na_n + 3},$$

$$a_1 = 1$$

で定められる数列 a_n の一般項を n の式で表しなさい。ただし、 n は 1 以上の自然数とします。

(3)

$$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$$

は整数です。その値を求めなさい。

(4) b, c を実数とし、 $f(x) = x^2 + bx + c$ とします。また、 $g(x)$ を

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ のとき, } g(x) = -1, \\ x > -1 \text{ のとき, } g(x) = x \end{cases}$$

と定めます。 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが異なる 2 点で接するとき、 b と c の値を求めなさい。

(必答問題)

〔Ⅱ〕以下の問いに答えなさい。

(1) x, y, z が 2 以上の整数であるとき, 不等式

$$\frac{xyz - 1}{(x - 1)yz} < \frac{xyz}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(2) x, y, z が $3 \leq x < y < z$ を満たす奇数であるとき, 不等式

$$1 < \frac{xyz - 1}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)} < 3$$

が成り立つことを証明しなさい。

(3) 関数

$$g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

が次の二つの条件 (i), (ii) を満たすとき, A, B, C の値を求めなさい。

(i) 方程式

$$g(x) = 0$$

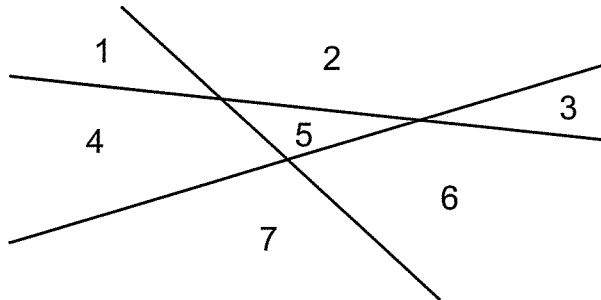
は異なる三つの整数を解に持ち, さらに, それらの解はすべて 3 以上の奇数です。

(ii) $\frac{A + B + 2C + 2}{A + B + C + 1}$ は整数です。

(選択問題) 〔Ⅲ〕～〔Ⅴ〕は、いずれか1題を選択し、解答すること

〔Ⅲ〕以下の問いに答えなさい。

- (1) 平面上に3本の直線を引くとき、下図のようにすれば、平面を7つの領域に分割することができます。平面上に5本の直線を引くとき、平面を最大でいくつの領域に分割することができますか。答えのみ記しなさい。



- (2) n を2以上の自然数とします。平面上に n 本の直線を引くとき、それらの交点の数は最大でいくつですか。 n を使った式で表しなさい。
- (3) n を自然数とします。平面上に n 本の直線を引くとき、平面を最大でいくつの領域に分割することができますか。 n を使った式で表しなさい。

(選択問題) 〔Ⅲ〕 ～ 〔Ⅴ〕 は、いずれか1題を選択し、解答すること

〔Ⅳ〕以下の問いに答えなさい。

- (1) $t = \tan x$ と置換することで、不定積分

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

を求めなさい。

- (2) n を自然数とすると、関数 $\frac{\cos x}{\sin^n x}$ の導関数を求めなさい。

- (3) n を 3 以上の自然数とすると、

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}$$

が成り立つことを証明しなさい。

- (4) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

の値を求めなさい。



(選択問題) 〔Ⅲ〕 ～ 〔Ⅴ〕 は、いずれか 1 題を選択し、解答すること

〔Ⅴ〕 a, b を正の実数とします。確率変数 X の取り得る値の範囲が $-1 \leq X \leq 3$ であり、その確率密度関数 $f(x)$ は

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \text{ のとき, } f(x) = a(x+1), \\ 0 < x \leq 3 \text{ のとき, } f(x) = bx + a \end{cases}$$

と表されています。また、 X の期待値 $E(X)$ は $\frac{2}{3}$ です。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) a と b の値を求めなさい。

(2) X の分散 $V(X)$ の値を求めなさい。

(3) 確率変数

$$Y = 18X + 5$$

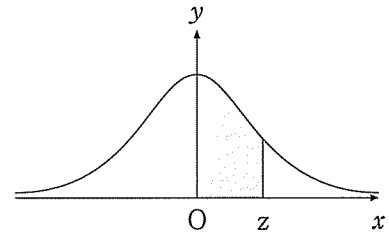
を考えます。 Y と同じ期待値、分散を持つ母集団から大きさ 117 の標本を無作為に抽出し、その標本平均を $\bar{Y}$ とします。このとき、標本の大きさ 117 は十分に大きいとみなせるので、 $\bar{Y}$ は近似的に正規分布に従うとします。

(ア) $\bar{Y}$ の期待値と分散を求めなさい。

(イ) $16 \leq \bar{Y} \leq 18$ となる確率の近似値を小数点以下第 2 位まで求めなさい。

正 規 分 布 表

下表は、標準正規分布の分布曲線における
右図の灰色部分の面積の値をまとめたもの
である。



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3.3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3.4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3.5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3.6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3.7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3.8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3.9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997



